École Normale Supérieure — Année 2018/19
FIMFA

Systèmes dynamiques
TD10

Exercice 1 (Inégalité de Hopf et théorème de Birkhoff)**.** Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit $T\colon X \to X$ une application laissant μ invariante. Pour $f \in L^1$ on pose

$$M_r(f) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{r-1} f \circ T^n$$

et $Mf = \sup\{M_r(f)\colon r > 0\}$.

1. Montrer l'inégalité maximale de Hopf (ou Dunford-Schwartz) : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour toute $f \in L^1(\mu)$

$$\lambda\, \mu(Mf > \lambda) \leq \int_{\{Mf > \lambda\}} f \, d\mu.$$

2. En déduire le théorème ergodique de Birkhoff : en notant $\mathcal{I}$ la tribu des ensembles T-invariants on a

$$\lim_{r \to \infty} M_r(f) = \mathbb{E}^{\mu}[f \mid \mathcal{I}], \quad \mu\text{-p.s.}$$

   On pourra procéder comme suit :
   - Se ramener au cas $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}] = 0$.
   - Montrer le résultat pour f de la forme $g \circ T - g$.
   - Montrer que l'ensemble des f de cette forme est dense dans le noyau de l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{I}$.
   - Conclure en utilisant Hopf.

Exercice 2 (Inégalité de Hardy-Littlewood)**.** Pour f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ on pose

$$M_r f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) \, dy$$

et $Mf = \sup\{M_r(f)\colon r > 0\}$, appelée fonction maximale de Hardy-Littlewood.

1. Montrer le lemme de recouvrement de Vitali : Soit $\mathcal{B}$ une famille finie de boules fermées dans $\mathbb{R}^n$, il existe une sous-famille $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ telle que les boules de $\mathcal{B}'$ soient disjointes et telle que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B(x,r) \in \mathcal{B}'} B(x, 3r).$$

2. Montrer que pour toute $f \in L^1(R^n)$ on a

$$\lambda\, \mathcal{L}^n(|Mf| > \lambda) \leq 3^n \|f\|_1, \quad \forall \lambda > 0.$$

3. Application : Montrer le théorème de différentiation de Lebesgue : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a pour presque tout x de $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{r \to 0} M_r f(x) = f(x).$$

   Indication : Commencer par f continue et utiliser Hardy-Littlewood pour étendre le résultat à toute fonction f dans L^1.

Questions subsidiaires :

4. Montrer une version temps continu de Hopf-Dunford-Schwartz : Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et soit (P_t) un semigroupe de Markov laissant μ invariante, c'est-à-dire une famille d'opérateurs vérifiant
   - $P_t \mathbb{1} = \mathbb{1}$;
   - $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$;
   - $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ pour tous s et t ;
   - $\int P_t f d\mu = \int f\, d\mu$.

   On pose

$$M_r(f) = \frac{1}{r} \int_0^r P_s f\, ds$$

   et $M(f) = \sup\{M_r(f) \colon r > 0\}$. Alors pour tout $\lambda \in R$ et toute f intégrable

$$\lambda\, \mu(Mf > \lambda) \leq \int_{\{Mf > \lambda\}} f\, d\mu.$$

5. Soit (P_t) est le semigroupe de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$:

$$P_t f(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mathrm{e}^{-|x-y|^2/2t}\, dy.$$

   Montrer que (P_t) laisse la mesure de Lebesgue invariante et établir une inégalité entre la fonction maximale associée et la fonction maximale de Hardy-Littlewood.

6. En déduire qu'on peut remplacer 3^n par $O(n)$ dans l'inégalité maximale de Hardy-Littlewood.

Note : Un problème ouvert depuis longtemps est de savoir si on peut remplacer $O(n)$ par $O(1)$. Le $O(n)$, dû à Stein et Strömberg en 1983 est la meilleure borne connue à ce jour.