Université Paris-Dauphine | Année 2017/18
M1MMD

Processus discrets
TD7. Chaines de Markov
Récurrence

Exercice 1. Sur l'espace $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on considère la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Identifier les classes de communication et déterminer les classes récurrentes.

Exercice 2 (Processus de naissance et mort)**.** Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels vérifiant $p_n \in]0, 1[$ pour tout n. Soit (X_n) la chaine de Markov sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition P vérifiant $P(0, 1) = 1$ et

$$P(x, x+1) = p_x, \quad P(x, x-1) = 1 - p_x, \quad \forall x \geq 1.$$

1. On fixe un entier $N \geq 2$ et on pose

   $$u(x) = \mathbb{P}_x(\text{le processus } X \text{ touche } 0 \text{ avant d'avoir touché } N).$$

   Déterminer l'équation linéaire satisfaite par u.
2. En déduire que

   $$u(1) = 1 - \frac{1}{\sum_{x=0}^{N-1} \gamma_x},$$

   où la suite (γ_n) est définie par

   $$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - p_i}{p_i}, \ \forall n \geq 1.$$
3. Montrer que la chaine (X_n) est récurrente si et seulement si

   $$\sum_{n\geq 0} \gamma_n = +\infty.$$

Exercice 3 (Marche aléatoire)**.** Soit $p \in]0,1[$. Soit (S_n) la chaine de Markov sur $\mathbb{Z}$ de matrice P donnée par

$$P(x, x+1) = p, \; P(x, x-1) = 1-p, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

On note $T_0^* = \inf\{n \geq 1 \colon S_n = 0\}$ le temps de retour en 0. En utilisant l'exercice précédent, montrer que

$$P_0(T_0^* < +\infty) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 1/2 \\ 2(1-p) & \text{si } p > 1/2 \\ 2p & \text{si } p < 1/2. \end{cases}$$

À quelle condition sur p la marche est-elle récurrente ?

Exercice 4. On modifie la marche simple de la manière suivante. On considère la chaine de Markov sur $\mathbb{Z}$, de matrice de transition P donnée par

$$P(x, x+2) = p, \quad P(x, x-1) = 1-p, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

1. Déterminer $P^n(0,0)$ pour tout entier n.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre p la chaine est-elle récurrente ?

Exercice 5. Montrer que la marche aléatoire sur l'arbre binaire infini est transiente. *Indication : on pourra considérer la profondeur de la marche et utiliser l'exercice 2.*

Figure 1 – L'arbre binaire infini