Université Paris-Dauphine Année 2017/18
M1MMD

Processus discrets
TD6. Chaines de Markov II
Propriété de Markov

Exercice 1. Soit (X_n) une chaine de Markov. On note P la matrice de transition et M l'espace d'état. On note $T = \inf\{n \geq 0\colon X_n \in A\}$ et on pose $u(x) = \mathbb{P}_x(T < +\infty)$.

1. Montrer que u vérifie le système

$$\begin{cases} u(x) = 1 & x \in A, \\ u(x) = Pu(x) & x \notin A. \end{cases}$$

2*. Montrer que si v résout le système précédent alors $v \geq u$.

Exercice 2 (Ruine du joueur)**.** Soit $p \in]0,1[$ et soit $N \geq 2$ un entier. Un joueur mise 1 euro de manière répétée, avec probabilité de succès p à chaque fois. On suppose qu'il dispose initialement d'une fortune comprise entre 0 et N et qu'il s'arrête dès qu'il est ruiné ou qu'il a atteint la somme de N euros. On appelle X_n la fortune du joueur au temps n et

$$T = \inf\{n \geq 0\colon X_n = 0 \text{ ou } N\}$$

la durée du jeu. Pour $x \in \{0, \dots, N\}$ on s'intéresse à la probabilité de ruine partant de x

$$u(x) = \mathbb{P}(T < +\infty;\, X_T = 0 \mid X_0 = x)$$

1. Montrer que (X_n) est une chaine de Markov et déterminer sa matrice de transition P.
2. Montrer que $u(x) = (1-p)u(x-1) + pu(x+1)$ pour tout $x \neq 0, N$.
3. En déduire que pour tout $x \in \{0, \dots, N\}$ on a

$$u(x) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - \left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} \quad \text{si } p \neq 1/2$$

et $u(x) = 1 - x/N$ si $p = 1/2$.

4. En raisonnant de manière analogue montrer que $\mathbb{P}_x(T < +\infty) = 1$ pour tout x.

On s'intéresse maintenant à la durée moyenne du jeu $m(x) = \mathbb{E}_x[T]$. Pour simplifier les calculs on se contentera du cas $p = 1/2$.

5. Montrer que $m(x) = 1 + (1-p)m(x-1) + pm(x+1)$ pour $x \neq 0, N$.
6. En déduire que $m(x) = x(N-x)$ pour tout x.

Exercice 3. Soit (X_n) une chaine de Markov. Pour x, y appartenant à l'espace d'état M on note $T_x = \inf\{n \geq 0\colon X_n = x\}$ le temps d'atteinte de x et

$$T_{x,y} = \inf\{n \geq 0\colon X_n = y \;\&\; \exists k \leq n,\, X_k = x\}$$

le premier instant où la chaine a visité les états x et y (dans cet ordre).

1. En utilisant la propriété de Markov forte montrer que

$$\mathbb{E}_\nu[T_{x,y}] = \mathbb{E}_\nu[T_x] + \mathbb{E}_x[T_y],$$

pour toute mesure de probabilité ν.

2. En déduire que pour tous x, y, z

$$\mathbb{E}_x[T_z] \leq \mathbb{E}_x[T_y] + \mathbb{E}_y[T_z].$$

3. Montrer qu'on définit une distance sur M en posant

$$d(x,y) = \mathbb{E}_x[T_y] + \mathbb{E}_y[T_x].$$

Exercice 4. Soit (X_n) une chaine de Markov. On note M et P l'espace d'état et la matrice de trnasition. Montrer que pour tous $x, y \in M$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(y,x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,x).$$