Université Paris-Dauphine | Année 2017/18
M1MMD

Processus discrets
TD4. Martingales III
Convergence

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. valant $+1$ et -1 avec probabilité $1/2$ et soit $(\mathcal{F}_n)$ la filtration associée. On pose

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \; n \geq 1.$$

Soit x un entier naturel non nul et soit T le temps d'atteinte de x

$$T = \inf\{n \geq 1; \; S_n = x\}.$$

L'objectif de l'exercice est d'utiliser la théorie des martingales pour montrer que T est fini p.s. mais pas intégrable.

1. Montrer que le processus $(S_{n\wedge T})$ est une martingale.
2. En déduire que $(S_{n\wedge T})$ converge p.s.
3. En déduire que T est fini presque surement.
   Indication : Remarquer que $|S_{n\wedge T} - S_{(n-1)\wedge T}| = \mathbb{1}_{\{n\leq T\}}$.
4. Le processus $(S_{n\wedge T})$ converge-t-il dans L^1 ?
5. En déduire que T n'est pas intégrable.

Exercice 2 (Urne de Polya)**.** On dispose d'une infinité de boules rouges et vertes. À l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages de la manière suivante : on tire une boule dans l'urne au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur. Soit S_n le nombre de boules rouges au temps n, et $X_n = S_n/(n+2)$ la proportion de boules rouges au temps n.

1. Montrer que (X_n) est une martingale par rapport à sa filtration naturelle et calculer $\mathbb{E}[X_n]$.
2. Montrer que (X_n) converge presque surement et dans L^1. On appelle X_∞ la limite.
3. Montrer par récurrence sur n que S_n est uniforme sur $\{1, \ldots, n+1\}$.
4. En déduire la loi de X_∞.
5. On fixe $k \geq 1$ et on pose

$$X_{k,n} = \frac{S_n(S_n+1)\cdots(S_n+k-1)}{(n+2)\cdots(n+k+1)}, \quad n \geq 0.$$

   Montrer que le processus $(X_{k,n})_{n\geq 0}$ est une martingale.
6. En déduire que

$$\mathbb{E}[X_\infty^k] = \frac{1}{k+1}$$

   pour tout k et retrouver ainsi la loi de X_∞.

Exercice 3 (Convergence dans L^p des martingales)**.** Soit $p \in]1, +\infty[$. Soit (X_n) une martingale bornée dans L^p : il existe une constante $C > 0$ telle que $\|X_n\|_p \leq C$ pour tout n.

1. Montrer que $(|X_n|^p)$ est une sous-martingale.
2. En utilisant l'inégalité maximale de Doob (voir TD2) en déduire que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0}\{|X_n|^p\}\right] < +\infty.$$

3. En déduire que (X_n) converge p.s. et dans L^p.
4. Le résultat reste-t-il vrai si $p = 1$?

Exercice 4. Soient $X, \xi_1, \xi_2, \ldots$ des variables indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, \varepsilon_n^2)$ pour tout $n \geqslant 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n = X + \xi_n$ et on appelle $(\mathcal{F}_n)$ la filtration naturelle des Y_n. On pose

$$X_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n], \quad n \geq 1.$$

La question de savoir si $X_n \to X$. On peut penser la variable X comme une quantité inconnue qu'on cherche à estimer. À chaque unité de temps on mesure X en commettant une erreur ξ_n supposée Gaussienne et indépendante des erreurs passées. On observe donc $Y_n = X + \xi_n$. La variable $X_n = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_n]$ est notre meilleure (au sens L^2) estimation de X au temps n.

1. Montrer que le processus (X_n) converge p.s. et dans L^2. On appellera X_∞ la limite.
2. Exprimer X_n en fonction des Y_i et des ε_i.
   Indication : Remarquer que le vecteur $(X, Y_1, \ldots, Y_n)$ est Gaussien.
3. En déduire la valeur de $\|X - X_n\|_2$.
4. Montrer que $X_\infty = X$ si et seulement si

$$\sum_{i\geq 1} \varepsilon_i^{-2} = +\infty.$$