Université Paris-Dauphine | Année 2017/18
M1MMD

Processus discrets
TD3. Martingales II
Le théorème d'arrêt

Exercice 1 (La martingale)**.** À l'origine, le terme *martingale* désignait la stratégie consistant, dans une suite de jeux de pile ou face, à doubler sa mise tant qu'on perd et à s'arrêter au premier succès. Le but de cet exercice est d'analyser cette stratégie.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. valant $+1$ et -1 avec probabilité $1/2$. On définit un processus (M_n) et une variable T par

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} X_k,\ n \geq 1$$
$$T = \inf\{n \geq 1;\ X_n = 1\}$$

On considère la filtration naturelle des X_n comme filtration de référence.

1. Montrer que (M_n) est une martingale et que T est un temps d'arrêt.
2. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}]$ pour tout n.
3. Montrer $T < +\infty$ p.s. et montrer que $M_T = 1$ p.s. Commenter.
4. Montrer que $\mathbb{E}[|M_{T-1}|] = +\infty$. Commenter.

Exercice 2 (Ruine du joueur)**.** Soit $p \in]0,1[$ et soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. vérifiant

$$\mathbb{P}(X_n = +1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$$

pour tout n. On appelle $(\mathcal{F}_n)$ la filtration naturelle des (X_n). Soit N un entier non nul et soit $x \in \{0, \dots, N\}$. On pose

$$S_0 = x, \quad S_n = x + \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geq 1.$$
$$T = \inf\{n \geq 0;\ S_n = 0 \text{ ou } N\},$$

et on s'intéresse au processus $(S_{n\wedge T})$. C'est la fortune au temps n d'un joueur disposant initialement de x euros, misant 1 euro à chaque temps, avec probabilité p de succès, et qui décide de s'arrêter dès qu'il est ruiné ou qu'il a atteint la somme de N euros. Le but de l'exercice est de déterminer la probabilité que le joueur atteigne les N euros.

1. Montrer que T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

2. Soit
$$S = \inf\{n \geq N,\ X_{n-N} = \cdots = X_n = 1\}$$
le temps d'attente d'une suite de $N+1$ succès d'affilée. Montrer que $T \leq S$ p.s. et en déduire que T est intégrable.
3. On suppose dans cette question et dans la suivante que $p = 1/2$. Montrer que (S_n) est une martingale.
4. En appliquant le théorème d'arrêt, déterminer $\mathbb{P}(S_T = N)$.
5. On suppose maintenant que $p \neq 1/2$. Montrer que le processus (M_n) donné par
$$M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n},\ n \geq 0$$
est une martingale, et déterminer $\mathbb{P}(S_T = 0)$.

On s'intéresse maintenant à la durée moyenne du jeu.

6. On suppose dans cette question que $p = 1/2$. Étudier le processus (S_n^2) et déterminer $\mathbb{E}[T]$.
7. Si $p \neq 1/2$, déterminer $\mathbb{E}[T]$ en considérant le processus (S_n).

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. telle que pour tout n la variable X_n soit uniforme sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, \ldots, Z\}$, et soit $(\mathcal{F}_n)$ la filtration naturelle des (X_n). Soit T_{AB} le temps d'attente de la chaine AB. Formellement
$$T_{AB} = \inf\{n \geq 2;\ X_{n-1} = A \text{ et } X_n = B\}.$$

1. Montrer que T_{AB} est un temps d'arrêt.
2. Montrer que T_{AB} est intégrable.
3. On pose
$$\begin{aligned} M_1 &= 26\,\mathbb{1}_{\{X_1 = A\}} \\ M_n &= 26\,\mathbb{1}_{\{X_n = A\}} + \sum_{k=2}^{n} 26^2\,\mathbb{1}_{\{X_{k-1}=A,\,X_k=B\}}. \end{aligned}$$
Montrer que $(M_n - n)$ est une martingale.
4. En appliquant le théorème d'arrêt, montrer que $\mathbb{E}[T_{AB}] = 26^2$.
5. On s'intéresse maintenant au temps d'attente de la suite BB. En raisonnant de manière analogue montrer que $\mathbb{E}[T_{BB}] = 26^2 + 26$.
6. Montrer que $\mathbb{E}[T_{ABRACADABRA}] = 26^{11} + 26^4 + 26$.