Université Paris-Dauphine | Année 2017/18
M1MMD

Processus discrets
TD2. Martingales I

Exercice 1. Soient S et T des temps d'arrêt. Les variables $S \wedge T$, $S \vee T$ et $S + T$ sont-elles des temps d'arrêt ? On suppose que $T \geq 1$ p.s. Est-ce que $T - 1$ est un temps d'arrêt ?

Exercice 2. Soit $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables i.i.d. On suppose que les Y_n sont intégrables et on pose $m = \mathbb{E}[Y_1]$. Soit $(\mathcal{F}_n)$ la filtration naturelle des (Y_n). Pour $n \geq 1$ on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad M_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i.$$

1. Montrer que le processus $(S_n - nm)$ est une martingale.
2. On suppose que $m \neq 0$. Montrer que le processus $(M_n \, m^{-n})$ est une martingale.

Exercice 3. Soit (M_n) une martingale par rapport à une filtration donnée, montrer que (M_n) est aussi une martingale par rapport à a sa filtration naturelle.

Exercice 4. Soit (M_n) une sous-martingale vérifiant $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$ pour tout n. Montrer que (M_n) est une martingale.

Exercice 5. Soit (M_n) une sur-martingale positive et soit

$$T = \inf\{n \geq 0 \colon M_n = 0\}.$$

Montrer qu'avec probabilité 1, on a $M_n = 0$ pour tout $n \geq T$. Autrement dit, une sur-martingale positive qui touche 0 reste en 0.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soit $(\mathcal{F}_n)$ une filtration.

1. Montrer que pour tout entier n et pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ la variable $T_A = (n+1)\mathbb{1}_A + n\mathbb{1}_{A^c}$ est un temps d'arrêt borné.
2. Soit (M_n) un processus adapté et intégrable. Montrer que (M_n) est une martingale si et seulement si $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$ pour tout temps d'arrêt borné T.

Exercice 7 (Inégalité maximale de Doob)**.** Soit $(M_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale positive. On pose pour tout $n \geq 0$

$$M_n^* = \max\{M_0, M_1, \ldots, M_n\}.$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer les inégalités maximales de Doob : pour tout entier n on a

$$\sup_{a>0} \{a\,\mathbb{P}(M_n^* \geq a)\} \leq \mathbb{E}[M_n], \tag{1}$$

$$\|M_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|M_n\|_p, \quad \forall p \in]1, +\infty[, \tag{2}$$

1. On fixe $a > 0$ et on pose $T = \inf\{n \geq 0 \colon M_n \geq a\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt.
2. Montrer que pour tout entier n
$$\mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_{\{T \leq n\}}] \leq \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_{\{T \leq n\}}].$$
3. En déduire que pour tout $a > 0$ on a
$$a\,\mathbb{P}(M_n^* \geq a) \leq \mathbb{E}[M_n \mathbb{1}_{\{M_n^* \geq a\}}],$$
puis l'inégalité (1).
4. Soit $p \in]1, +\infty[$. Montrer que
$$\mathbb{E}\big[(M_n^*)^p\big] = \int_0^{+\infty} p\, a^{p-1} \mathbb{P}(M_n^* \geq a)\, da.$$
5. En appliquant le résultat de la question 3. montrer que
$$\mathbb{E}\big[(M_n^*)^p\big] \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}\big[M_n (M_n^*)^{p-1}\big].$$
6. En déduire l'inégalité (2).