Université Paris-Dauphine — Année 2017/18
M1MMD

**Processus discrets**
**TD1. Espérance conditionnelle**

**Exercice 1** (Propriété d'emboitement)**.** Soit $X$ une variable intégrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux sous–tribus de $\mathcal{F}$ vérifiant $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}] \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}].$$

**Exercice 2.** Soit $\{A_1, A_2, \ldots\}$ une partition (finie ou infinie) de $\Omega$. Soit $\mathcal{G} = \sigma(A_1, A_2, \ldots)$ la tribu engendrée par cette partition.

1. Décrire la tribu $\mathcal{G}$.
2. On suppose pour simplifier que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i$. Montrer que pour toute variable $X$ intégrable on a

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \sum_{i \geq 1} \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_i}]}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{1}_{A_i}.$$

**Exercice 3.**

1. Soit $(X, Y)$ un couple de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ possédant une densité jointe $f_{X,Y}$. Montrer que pour toute fonction $g$ telle que $g(Y)$ soit intégrable on a $\mathbb{E}[g(Y) \mid X] = h(X)$ où $h$ est n'importe quelle fonction mesurable vérifiant

$$h(x) \int_{\mathbb{R}^m} f_{X,Y}(x, y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} g(y) f_{X,Y}(x, y)\, dy.$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Soient $X, Y$ deux variables i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$. Déterminer

$$\mathbb{E}[X \mid XY].$$

3. Soient $X, Y$ deux variables indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une sous–tribu de $\mathcal{F}$. A–t–on

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\, \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] \ ?$$

**Exercice 4.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. intégrables. Déterminer les espérances conditionnelles suivantes :

— $\mathbb{E}[X_1 \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n]$,
— $\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n \mid X_1]$.

**Exercice 5.** Soit $Z$ une variable exponentielle de paramètre 1 et soit $t > 0$. On pose $X = \min(Z, t)$ et $Y = \max(Z, t)$. Calculer $\mathbb{E}[Z \mid X]$ et $\mathbb{E}[Z \mid Y]$.

**Exercice 6.** Soit $X$ une variable de carré intégrable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une sous–tribu de $\mathcal{F}$. On pose

$$\operatorname{var}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]^2.$$

Montrer que

$$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}\left[\operatorname{var}(X \mid \mathcal{G})\right] + \operatorname{var}\left(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\right).$$

**Exercice 7.** Soit $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur Gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $\Gamma$. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\mathbb{E}[X_0 \mid X_1, \ldots, X_n] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \quad \text{p.s.}$$

et déterminer les poids $\lambda_i$ en fonction de $\Gamma$.
*Indication :* Commencer par se ramener au cas où la matrice de covariance du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$ est non dégénérée, et utiliser le fait que les coordonnées d'un vecteur Gaussien sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

**Exercice 8.** Soit $X, Y$ deux variables intégrables définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{G}$ une sous–tribu de $\mathcal{F}$, et soit $B \in \mathcal{G}$. Montrer que si $X = Y$ sur $B$ p.s., c'est–à–dire si $X(\omega) = Y(\omega)$ pour presque tout $\omega \in B$, alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ sur $B$.