Université Paris-Dauphine — Année 2020/2021
M1

Analyse convexe approfondie
Feuille d'exercices 3

Exercice 1 (Polyèdre de Birkhoff)**.** Le polyèdre de Birkhoff en dimension n est l'ensemble des matrices $n \times n$ *doublement stochastiques.* C'est-à-dire des matrices à coefficients positifs et dont la somme des coefficients sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut 1.

1. Montrer que si une matrice A est un point extrémal du polyèdre de Birkhoff alors elle a au moins $(n-1)^2$ entrées nulles.
   Indication : Commencer par remarquer qu'il y a une équation redondante dans la définition des matrices doublement stochastiques.
2. En déduire que la matrice A possède au moins une entrée égale à 1.
3. En raisonnant par récurrence sur n montrer que les points extrémaux de K sont exactement les matrices de permutation. Rappelons qu'on appelle matrice de permutation une matrice qui agit par permutation des coordonnées, ce qui revient à dire que les entrées de la matrice ne sont que des 0 et des 1, avec exactement un 1 par ligne et par colonne.
4. Application (lemme de Schur) : étant donné $x \in \mathbb{R}^n$ on note $P(x)$ le polytope engendré par les $n!$ vecteurs obtenus en permutant les coordonnées de x :
$$P(x) = \mathrm{conv}((x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \colon \sigma \in S_n).$$
   Soit $B = (b_{ij})$ un matrice $n \times n$ symétrique et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de B, comptées avec multiplicité. Montrer que la diagonale $(b_{11}, \ldots, b_{nn})$ de B appartient au polytope $P((\lambda_1, \ldots, \lambda_n))$.

Exercice 2. Montrer qu'en dimension 1 et 2 l'ensemble des points extrémaux d'un convexe compact est compact. Donner un contre-exemple en dimension 3.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}^0([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme de la convergence uniforme. On appelle B sa boule unité.

1. Soit $f \in B$ telle qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| < 1$. Montrer que f n'est pas un point extrémal de B.
2. En déduire que B ne possède que deux points extrémaux, et les identifier. Commenter, en particulier montrer en quoi ça ne contredit pas Krein-Milman.
3. Dans le même ordre d'idée montrer que la boule unité de $L^1([0,1])$ (fonctions intégrables sur $[0,1]$ pour la mesure de Lebesgue) ne possède *aucun* point extrémal (incroyable mais vrai).

Exercice 4 (Quelques propriétés simples de la polarité)**.** Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit M une matrice $n \times n$ inversible, montrer que $(MA)^\circ = (M^T)^{-1} A^\circ$.
2. Montrer que $(\mathrm{conv}(A))^\circ = A^\circ$. En déduire que le polaire d'un polytope est un polyèdre.
3. Montrer que si A est borné alors 0 appartient à l'intérieur de A°. Montrer que si 0 appartient à l'intérieur de A alors A° est borné.
4. On suppose A borné et on pose $h_A(x) = \sup_{y \in A} \{\langle x, y\rangle\}$. La fonction h_A est appelée fonction d'appui de A. Montrer que h_A est aussi la jauge de A°.

Exercice 5 (Polaire d'un simplexe)**.** On rappelle qu'on appelle simplexe de $\mathbb{R}^n$ l'enveloppe convexe de $n+1$ points de $\mathbb{R}^n$ affinement indépendants. Montrer que le polaire d'un simplexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur est encore un simplexe contenant 0 dans son intérieur.
Indication : On pourra utiliser le théorème du cours qui affirme que les polyèdres bornés sont des polytopes.

Exercice 6.

1. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'on a $A = A^\circ$ si et seulement si A est égal à la boule euclidienne. Donc la boule euclidienne est le seul ensemble qui soit son propre polaire.
2. Soit $C = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2} \leq x_n\}$. Faire un dessin en dimension 3. Montrer que C est un cône convexe fermé et qu'il est son propre cône dual : $C = C^*$.
3. Donner un autre exemple de cône (plus simple) qui soit égal à son dual. On voit donc apparaître ici une différence entre la polarité des ensembles convexes et la dualité des cônes convexes.

Exercice 7 (Problème de transport optimal discret)**.** Soient μ, ν appartenant au simplexe Δ_{n-1} et soit $C = (c_{ij})$ une matrice $n \times n$. On considère le problème suivant :

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \sum_{i,j=1}^n c_{ij}\pi_{ij} \\ \text{sous contraintes} & \sum_{j=1}^n \pi_{ij} = \mu_i, \ \forall i \\ & \sum_{i=1}^n \pi_{ij} = \nu_i, \ \forall j \\ & \pi_{ij} \geq 0, \ \forall ij. \end{array}$$

Montrer que ce problème admet une solution, et déterminer son problème dual.

Exercice 8 (Conditions d'optimalité)**.** On considère un problème d'optimisation linéaire sur $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \langle a, x\rangle \\ \text{sous contraintes} & \langle a_i, x\rangle \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m, \end{array}$$

où $a, a_1, \dots, a_m$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $b_1, \dots, b_m$ sont des réels. En utilisant le résultat de dualité fait en cours, montrer que le problème admet une solution si et seulement s'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = a$,
2. $\langle a_i, x^*\rangle \leq b_i$, $\forall i = 1, \dots, m$,
3. $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, m$,
4. $\lambda_i(\langle a_i, x^*\rangle - b_i) = 0$, $\forall i = 1, \dots, m$.

Montrer de plus que le vecteur x^* est alors solution du problème. Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange. Les conditions précédentes sont appelées conditions KKT (pour Karush-Kuhn-Tucker). On verra un peu plus tard dans ce cours une version plus générale de ce résultat pour des problèmes d'optimisation convexe.