Université Paris-Dauphine M1

Année 2020/2021

Analyse convexe approfondie
Feuille d'exercices 2
`[version 2]`

Exercice 1 (Une autre démonstration de Hahn-Banach pour les Hilbert)**.** Soit H un espace de Hilbert, soit K un convexe compact et soit C un convexe fermé disjoint de K.

1. Montrer qu'il existe un couple de points qui minimise la quantité $\|x-y\|$ parmi les couples (x, y) de $K \times C$.
   Indication : Il y a plusieurs manière de faire mais on pourra par exemple commencer par montrer que l'application qui a un point x associe son projeté sur C est 1-lipschitzienne. Attention on ne prétend pas ici que le couple est unique, c'est assez facile de trouver des exemples où il ne l'est pas.
2. En déduire l'existence d'un hyperplan affine qui sépare les convexes K et C au sens strict.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et soit E^* son dual topologique, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E. Étant donné $A \subset E$ on note $A^\perp$ l'ensemble des formes $\phi \in E^*$ qui soient identiquement nulles sur A. En utilisant la forme géométrique de Hahn-Banach, montrer que $A^\perp = \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{vect}(A)$ est dense dans A.

Exercice 3. On note $\ell_1(\mathbb{N})$ l'espace des suites sommables muni de la norme $\|u\|_1 = \sum_i |u_i|$ et soit $\ell_\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites bornées muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_i\{|u_i|\}$.

1. Étant donné une suite $v \in \ell_1(\mathbb{N})$ montrer que l'application
   $$u \in \ell_\infty(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{i \geq 1} u_i v_i$$
   définit une forme linéaire continue sur $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Montrer de plus que la norme de cette forme linéaire est $\|u\|_1$. On en déduit que $\ell_1(\mathbb{N})$ s'injecte de manière isométrique dans l'espace dual de $\ell_\infty(\mathbb{N})$.
2. On note F le sous-espace de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ constitué des suites convergentes. Pour $u \in F$ on pose $\varphi(u) = \lim_n u_n$. Montrer que φ est une forme linéaire continue sur F, et que sa norme vaut 1.
3. D'après Hahn-Banach, il existe une extension de φ à $\ell_\infty(\mathbb{N})$ qui soit encore de norme 1. Montrer que la forme linéaire ainsi obtenue ne peut pas provenir de la dualité avec un élément de $\ell_1(\mathbb{N})$, autrement dit l'injection de $\ell_1(\mathbb{N})$ dans le dual de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ définie plus haut n'est pas surjective.

Exercice 4. On considère l'espace $L^2([0, 1])$ des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$ pour la mesure de Lebesgue. Soit E_α l'ensemble des fonctions continues f sur $[0, 1]$ vérifiant $f(0) = \alpha$.

1. Montrer que E_α est un sous-espace affine de $L^2([0, 1])$, et qu'il est dense dans $L^2([0, 1])$.
   Remarque : Le fait que les fonctions continues soient denses dans $L^2([0, 1])$ est supposé connu, on ne demande pas de le redémontrer.
2. En déduire que par exemple E_0 et E_1 sont deux ensembles convexes disjoints qui ne peuvent pas être séparés par une forme linéaire continue.

Exercice 5 (Lemme de Mazur)**.** Soit E un espace de Banach.

1. Soit K un ensemble convexe fermé. Montrer que K est aussi fermé pour la topologie faible.
2. Soit (x_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers $x \in E$. Montrer qu'il existe une suite (y_n) d'éléments de $\mathrm{conv}(x_1, x_2, \dots)$ qui converge fortement vers x.

Exercice 6 (Lemme de Farkas)**.** Il y a plusieurs énoncés assez proches qui portent le nom de lemme de Farkas dans la littérature. En voici quelques-uns :

1. Soient $\phi, \phi_1, \dots, \phi_m$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, on a l'équivalence suivante :

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{\phi_i \geq 0\} \subset \{\phi \geq 0\} \quad \Leftrightarrow \quad \phi \in \mathrm{pos}(\phi_1, \dots, \phi_m).$$

2. Soient $\phi_1, \dots, \phi_m$ des formes affines (c'est-à-dire forme linéaire plus constante) sur $\mathbb{R}^n$, on a l'équivalence suivante :

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{\phi_i \geq 0\} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad -1 \in \mathrm{pos}(\phi_1, \dots, \phi_m).$$

   Remarque : Dans la proposition de droite, -1 signifie en fait la forme affine constante égale à -1.

3. Soit A une matrice de taille $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Exactement une des deux propositions suivantes est vérifiée :
   (i) l'équation $Ax = b$ admet une solution $x \in (\mathbb{R}_+)^n$;
   (ii) il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $A^T y \in (\mathbb{R}_+)^n$ et tel que $\langle y, b \rangle < 0$.

Démontrer chacun de ces résultats. On pourra soit en montrer un et en déduire les autres ou les montrer de manière indépendantes les uns des autres. On pourra d'abord démontrer le fait suivant (parfois aussi appelé lemme de Farkas) : un cône convexe engendré par un nombre fini de points de $\mathbb{R}^n$ est fermé.