Université Paris–Dauphine
L3

Année 2019/2020

Analyse Complexe

Joseph Lehec

Table des matières

Avant-propos

Ces notes de cours ont été rédigées à partir des références qui suivent :

— H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann.

— W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Dunod.

— L.V. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill.

— Notes de cours de Terry Tao, disponibles sur son blog :
`https://terrytao.wordpress.com/category/teaching/246a-complex-analysis/`.

On ne précisera pas dans le détail à quel auteur est emprunté chaque démonstration ou chaque exemple.

Ces notes servent de support à un cours d'introduction à l'analyse complexe, elles n'ont donc pas la prétention de faire le tour du sujet. On a dû faire l'impasse sur certains théorèmes pourtant très classiques, comme par exemple le théorème de l'application conforme de Riemann. Les références sus-mentionnées permettent d'aller plus loin dans la théorie.

Ce document contient relativement peu d'exemples illustrant les théorèmes. Les exemples sont plutôt traités dans les feuilles d'exercice, qui sont donc un complément essentiel de ces notes de cours.

Ces notes ne contiennent aucun dessin, la raison étant que ça prend beaucoup de temps de faire des dessins sur l'ordinateur et de les insérer dans le fichier. L'analyse complexe est pourtant un domaine dans lequel l'image est indispensable, certaines démonstrations sont difficilement compréhensibles sans avoir un dessin sous les yeux. C'est donc au lecteur de faire les dessins lui-même, il faut en faire le plus possible. Dans les cas où c'est impératif, c'est écrit en toutes lettres dans le corps du texte.

1 Rappels sur la connexité

Cette section est une section préliminaire, le cours d'analyse complexe à proprement parler ne commence qu'à la section suivante.

Definition 1. Soit (X, d) un espace métrique, on dit qu'il est *connexe* s'il n'existe pas d'ouvert fermé non trivial. Autrement dit si $U \subset X$ est à la fois ouvert et fermé alors $U = \emptyset$ ou $U = X$. De manière équivalente, on ne peut pas partitionner X en deux ouverts non triviaux. On dit qu'un sous-ensemble Y de X est connexe, si en restreignant la métrique d à Y on obtient un espace connexe.

Remarque. En fait la connexité est une notion topologique et non pas métrique, il n'y a pas de raison de supposer que la topologie de X provient d'une distance. Ceci étant dit, dans ce cours on ne parlera que de la connexité de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, donc il n'y a pas de raison de chercher à être le plus général possible.

Proposition 2. *On muni $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si c'est un intervalle.*

Démonstration. Rappelons d'abord que par définition I est un intervalle s'il vérifie $x, y \in I \Rightarrow [x, y] \subset I$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On va montrer les deux implications par contraposée. Autrement dit on va montrer que I n'est pas un intervalle si et seulement s'il n'est pas connexe. Si I n'est pas un intervalle, il existe $x < z < y$ tels que $x, y \in I$ et $z \notin I$. On pose alors $I_0 = I \cap]-\infty; z[$ et $I_1 = I \cap]z, +\infty[$. Alors I_0 et I_1 sont des ouverts relatifs de I. Ils sont disjoints, tous deux non vides, puisqu'ils contiennent x et y respectivement, et on a $I = I_0 \cup I_1$, puisque $z \notin I$. Ceci montre que I n'est pas connexe. Réciproquement si I n'est pas connexe, on peut partitionner I en deux ouverts relatifs non triviaux A et B. Soit $a \in A$ et $b \in B$ et supposons par exemple que $a < b$. Ensuite posons $c = \inf\{t \geq a \colon t \in B\}$. Alors par définition c est compris entre a et b, et en utilisant le fait que A et B sont des ouverts relatifs de I il est facile de voir que c ne peut appartenir ni à A ni à B. Donc $c \notin I$ ce qui montre que I n'est pas un intervalle. $\square$

Exemple. L'ensemble $\{0, 1\}$ n'est pas connexe. On peut le voir comme une conséquence de la proposition précédente, ou directement en observant que le singleton $\{0\}$ est un ouvert fermé non trivial de $\{0, 1\}$. Le singleton $\{0\}$ est bien un ouvert relatif de $\{0, 1\}$ puisque $\{0\} = \{0, 1\} \cap]-\infty; \frac{1}{2}[$.

La notion de connexité est préservée par les applications continues.

Proposition 3. *Si $f \colon X \to Y$ est une application continue, alors l'image d'un sous-ensemble connexe de X par f est un sous-ensemble connexe de Y.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si X est connexe et f surjective alors Y est connexe. Soit V un ouvert fermé de Y. Alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert fermé de X. Donc $f^{-1}(V) = \emptyset$ ou $f^{-1}(V) = X$. Comme f est surjective, on en déduit $V = \emptyset$ ou $V = Y$ ce qui montre que Y est connexe. $\square$

Remarque. Si X et Y sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ cette proposition revient à dire que l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle, c'est le théorème des valeurs intermédiaires.

On utilisera souvent le corollaire suivant.

Corollaire 4. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration. Le sens direct se déduit de la proposition précédente : si X est connexe et $f \colon X \to \{0, 1\}$ est continue alors $f(X)$ est un sous-ensemble connexe de $\{0, 1\}$, donc $f(X) = \{0\}$ ou $f(X) = \{1\}$. Réciproquement si toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante, alors en particulier les indicatrices des ensembles ouverts fermés sont constantes. Il est en effet facile de voir que l'indicatrice d'un ensemble ouvert fermé est continue. Donc les ouverts fermés sont triviaux. $\square$

Montrons maintenant que tout espace métrique admet une décomposition en parties connexes.

Proposition 5. *Soit (X, d) un espace métrique et soit $x \in X$. L'union des parties connexes de X contenant x est connexe. C'est la plus grande partie connexe de X contenant x. Elle est appelée* composante connexe *de x. De plus deux composantes connexes distinctes sont forcément disjointes. Les composantes connexes de X forment donc une partition de X.*

Démonstration. Posons
$$C_x = \bigcup \{V : x \in V,\, V \text{ connexe}\}$$
et soit $f : C_x \to \{0,1\}$ une fonction continue. Si V est une partie connexe de X contenant x alors la fonction f restreinte à V est continue à valeurs dans $\{0,1\}$, donc constante. Donc $f(y) = f(x)$ pour tout $y \in V$. Comme ceci est vrai pour tout V on en déduit que f est constante sur C_x, ce qui montre que C_x est connexe. Pour démontrer la deuxième partie de la proposition, on se donne $x, y \in X$ et on suppose que $C_x \cap C_y \neq \emptyset$. Soit z un point commun à C_x et C_y. Comme C_x est connexe et contient z on a alors $C_x \subset C_z$. Du coup C_z est connexe et contient x ce qui donne $C_z \subset C_x$. Donc $C_x = C_z$. De même $C_y = C_z$ et donc $C_x = C_y$, ce qu'il fallait démontrer. □

Exemples. Les composantes connexes de $\mathbb{Z}$ sont les singletons. Les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$ sont $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

Il existe une autre notion de connexité, qui est un peu plus intuitive.

Definition 6. Soit (X,d) un espace métrique, on dit qu'il est connexe par arc si pour tous $x, y \in X$ il existe un arc joignant x à y, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et une application continue $\gamma : [a,b] \to X$ telle $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$.

Il y a bien sûr un lien entre les deux notions de connexité.

Proposition 7. *Si X est connexe par arcs, alors il est connexe.*

Démonstration. Soit U un ouvert fermé non vide de X. Soit $x \in U$, soit $y \in X$ et soit $\gamma : [a,b] \to X$ un chemin continu joignant x à y. Alors $\gamma^{-1}(U)$ est un ouvert fermé non vide de $[a,b]$. Comme $[a,b]$ est connexe $\gamma^{-1}(U) = [a,b]$. En particulier $y = \gamma(b) \in U$. Donc $U = X$, ce qui montre que X est connexe. □

Exemple. Les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ sont clairement connexes par arc. La proposition montre donc qu'ils sont connexes.

La réciproque de la proposition est en général fausse mais les contre-exemples sont un peu exotiques. La réciproque est par exemple vraie pour les sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 8. *Soit Ω un ouvert connexe $\mathbb{R}^n$, alors Ω est connexe par arcs.*

Démonstration. On fixe $x \in \Omega$ et on appelle U l'ensemble des éléments y de Ω tels qu'il existe un chemin continu à valeurs dans Ω allant de x à y. Montrons que U est ouvert. Comme Ω est ouvert, pour $y \in U$, il existe $\epsilon > 0$ telle que la boule centrée en y et de rayon ϵ soit contenue dans Ω. Soit z appartenant cette boule, en collant le segment $[y,z]$ à un chemin allant de x à y, on obtient un chemin continu allant de x à z à valeurs dans Ω. Donc $z \in U$, ce qui montre que U est ouvert. En raisonnant de manière similaire on montre que $\Omega \backslash U$ est ouvert aussi. Donc U est un ouvert fermé non vide (car $x \in U$) de Ω. Par connexité on en déduit $U = \Omega$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. En modifiant légèrement la démonstration précédente on peut montrer que les ouverts connexes de $\mathbb{R}^n$ sont connexes par arc $\mathcal{C}^1$. C'est-à-dire que pour $x, y \in \Omega$ il existe un chemin joignant x à y qui soit non seulement continu mais de classe $\mathcal{C}^1$.

Terminons cette section préliminaire par un résultat très classique : une fonction de différentielle nulle sur un ouvert connexe est constante.

Lemme 9. *Soient n et k deux entiers, soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ une fonction différentiable dont la différentielle est nulle. Alors f est constante.*

Démonstration. Il suffit de faire la démonstration dans le cas $k = 1$. En effet on peut écrire $f = (f_1, \dots, f_k)$ et appliquer le cas $k = 1$ à chacune des f_i. On fixe $x \in \Omega$ et on pose $U = \{y \in \Omega : f(y) = f(x)\}$. Soit $y \in U$, comme Ω est ouvert, si y' est suffisamment proche de y le segment $[y, y']$ est contenu dans Ω. On pose alors $\phi(t) = f((1-t)y + ty')$ pour $t \in [0,1]$. Alors ϕ est dérivable et $\phi'(t) = df((1-t)x + ty)(y - x) = 0$ pour tout t. Donc ϕ est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de dérivée nulle. D'après le théorème des accroissements finis on a alors $\phi(0) = \phi(1)$, c'est-à-dire $f(y) = f(y')$, ce qui montre que U est un ouvert de Ω. Par ailleurs U est un fermé relatif par continuité de f. Donc $U = \Omega$ par connexité. □

2 Fonctions holomorphes, fonctions analytiques

Dans ce cours on appellera *domaine* un sous-ensemble ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Definition 10. Soit Ω un domaine et $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. On dit qu'une fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z)}{z-z_0} \quad \text{existe.}$$

Cette limite est alors appelée dérivée de f en z_0 et notée $f'(z_0)$. On dit que f est *holomorphe* sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω sera noté $\mathcal{H}(\Omega)$.

L'holomorphie est donc l'analogue complexe de la dérivabilité réelle.

Exemples. Pour tout entier naturel n la fonction $z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et sa dérivée est $z \mapsto nz^{n-1}$. En effet

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} = nz_0^{n-1}.$$

La fonction $z \mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ de dérivée $-1/z^2$. En effet

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{-1}{zz_0} = \frac{-1}{z_0^2}.$$

Une fonction de la variable complexe peut aussi être vue comme une fonction de deux variables réelles, et on peut se poser la question de sa différentiabilité. Rappelons qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est dite différentiable en z_0 s'il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$f(z) = f(z_0) + a\Re(z-z_0) + b\Im(z-z_0) + o(|z-z_0|)$$

au voisinage de z_0. On dit que a et b sont les dérivées partielles de f, notée respectivement $\partial_x f(z_0)$ et $\partial_y f(z_0)$. On en particulier

$$\partial_x f(z_0) = \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}, \quad \partial_y f(z_0) = \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{h}.$$

Faisons tout de suite le lien entre différentiabilité et holomorphie.

Lemme 11 (Condition de Cauchy-Riemann)**.** *Une fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si elle est différentiable et ses dérivées partielles vérifient*

$$\partial_x f(z_0) + i\partial_y f(z_0) = 0.$$

Cette condition est appelée condition de Cauchy-Riemmann.

Démonstration. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|) \\ &= f(z_0) + f'(z_0)\Re(z-z_0) + if'(z-z_0)\Im(z-z_0) + o(|z-z_0|). \end{aligned}$$

Donc f est différentiable et ses dérivées partielles vérifient

$$\partial_x f(z_0) = f'(z_0), \quad \partial_y f(z_0) = if'(z_0),$$

ce qui montre que la condition de Cauchy-Riemann est vérifiée. Réciproquement, si f est différentiable en z_0 et vérifie Cauchy-Riemann alors

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \partial_x f(z_0)\Re(z-z_0) + \partial_y f(z_0)\Im(z-z_0) + o(|z-z_0|) \\ &= f(z_0) + \partial_x f(z_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|), \end{aligned}$$

ce qui montre que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et que $f'(z_0) = \partial_x f(z_0)$. □

Exemple. La fonction $z \mapsto |z|^2$ n'est holomorphe sur aucun domaine. En effet elle est bien différentiable mais ses dérivées partielles, données par $\partial_x |z|^2 = 2\Re z$ et $\partial_y |z|^2 = 2\Im(z)$, ne vérifient la condition de Cauchy Riemann qu'en 0.

Remarque. L'holomorphie est donc une condition de différentiabilité plus une certaine condition algébrique sur les dérivées partielles. On peut aussi voir cette condition de manière plus géométrique : la condition de Cauchy-Riemann revient en effet à dire que la différentielle de f en tout point, vue comme application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, est une similitude, à savoir la composée d'une rotation et d'une homothétie.

On peut faire tout un tas d'opérations sur les fonctions holomorphes.

Proposition 12. *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un même domaine. Alors $f + g$ et fg sont holomorphes et $(f + g)' = f' + g'$ et $(fg)' = fg' + f'g$. De plus si f ne s'annule pas alors $1/f$ est holomorphe et $(1/f)' = -f'/f^2$. Enfin, si f et g sont holomorphes et si l'image de g est contenue dans le domaine de définition de f, alors $f \circ g$ est holomorphe et $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.*

Démonstration. Les démonstrations sont exactement les mêmes que celles des propriétés analogues pour des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On va juste faire le cas du produit pour fixer les idées et laisser le reste en exercice. Si f et g sont $\mathbb{C}$-dérivables en z_0 alors

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)\right)\left(g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)\right) \\ &= f(z_0)g(z_0) + \left(f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)\right)(z - z_0) + o(|z - z_0|), \end{aligned}$$

ce qui montre que fg est dérivable en z_0 de dérivée $f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$. □

Exemple. Cette proposition permet de retrouver le fait que z^n est dérivable sur $\mathbb{C}$ de dérivée nz^{n-1} pour n entier naturel. On peut aussi en déduire que z^{-n} est dérivable sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ de dérivée $-nz^{-n-1}$.

Definition 13. Un série entière est une série de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ où (a_n) est une suite de nombres complexes.

Definition 14 (Rayon de convergence)**.** La quantité

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 \colon \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < +\infty \right\} \in [0, +\infty],$$

est appelée rayon de convergence de la série. Le disque ouvert $D(0, R)$ est appelé disque de convergence. Par définition si z appartient au disque de convergence alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Exemples. Le rayon de convergence de $\sum z^n/n!$ est $+\infty$ et le rayon de convergence de $\sum z^n$ est 1.

Rappelons que si (b_n) est une suite de nombres réels on définit sa limsup comme

$$\limsup b_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{b_k\}.$$

C'est aussi la plus grande valeur d'adhérence de la suite (b_n), c'est-à-dire la plus grande limite que peut prendre une sous-suite de (b_n), en autorisant les limites $+\infty$ et $-\infty$.

Lemme 15. *Le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ vaut $\frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$.*

Démonstration. Si $r > 1/\limsup |a_n|^{1/n}$ alors $|a_n|r^n \geq 1$ pour une infinité de n et donc $\sum |a_n| r^n$ ne converge pas. Si $r < 1/\limsup |a_n|^{1/n}$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $|a_n|r^n \leq (1 - \epsilon)^n$ pour n suffisamment grand. Donc $\sum |a_n| r^n$ converge. □

Remarque. Ce lemme permet de calculer le rayon de convergence de toute série entière. En pratique, on utilise souvent le critère de d'Alembert : si $|a_{n+1}|/|a_n|$ tend vers $\ell \in [0, +\infty]$ alors le rayon de convergence est $1/\ell$ (voir TD). Ce critère est plus facile à utiliser mais il ne permet pas de conclure lorsque $|a_{n+1}|/|a_n|$ ne converge pas.

Le lemme précédent montre en particulier que si $|z|$ est strictement plus grand que le rayon de convergence alors $a_n z^n$ ne tend pas vers 0. En particulier $\sum a_n z^n$ ne converge pas. En résumé, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument si z appartient au disque de convergence, et elle diverge si z n'appartient pas à l'adhérence du disque. À la frontière divers comportements sont possibles.

Exemple. Les série $\sum_{n\geq 1} z^n$, $\sum_{n\geq 1} z^n/n^2$ et $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ admettent toute 1 comme rayon de convergence. On peut par exemple appliquer le critère de d'Alembert. Regardons le comportement au bord du disque de convergence. Dans le premier cas $\sum_{n\geq 1} z^n$ diverge pour tous les z de module 1. Dans le deuxième cas on a convergence absolue pour tous les z de module 1. Le troisième cas est plus subtil : la série $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ diverge pour $z = 1$, mais elle converge pour tous les autres z de module 1 (voir TD).

Étudions maintenant la fonction $f(z) = \sum a_n z^n$ à l'intérieur du disque de convergence $D(0, R)$.

Théorème 16. *Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence R est strictement positif. Alors f est holomorphe sur $D(0, R)$ et sa dérivée est donnée par*

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

Autrement dit on peut dériver terme à terme une série entière convergente.

Démonstration. Remarquons d'abord que d'après le Lemme 15, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ est aussi égal à R. De même le rayon de $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n z^{n-2}$ est encore égal à R. Soit $r < R$ et soient z et z_0 appartenant au disque $D(0, r)$. On écrit

$$f(z) - f(z_0) - (z - z_0)\sum_{n\geq 1} n a_n z_0^{n-1} = \sum_{n\geq 2} a_n \left(z^n - z^{n_0} - n z_0^{n-1}(z - z_0)\right).$$

Mais en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction $\varphi(t) = ((1-t)z_0 + tz)^n$ entre 0 et 1 on voit que

$$|z^n - z_0^n - n z_0^{n-1}(z - z_0)| \leq \frac{n(n-1)r^{n-2}}{2}|z - z_0|^2.$$

On en déduit

$$\left|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)\sum_{n\geq 1} n a_n z_0^{n-1}\right| \leq \frac{|z - z_0|^2}{2}\sum_{n\geq 2} n(n-1)|a_n| r^{n-2} \leq C|z - z_0|^2,$$

pour une certaine constante $C > 0$, puisque la série $\sum n(n-1)a_n r^{n-2}$ est absolument convergente. On obtient donc

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\sum_{n\geq 1} n a_n z_0^{n-1} + o(|z - z_0|)$$

ce qui est le résultat. □

Bien sûr on peut alors itérer le résultat. On en déduit que f infiniment dérivable et que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}.$$

En particulier $f^{(k)}(0) = k!a_k$. La série entière $\sum a_n z^n$ est donc le développement en série de Taylor infini de f. Ceci montre que en particulier la somme de la série détermine les coefficients (a_n).

Definition 17. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en $z_0 \in \Omega$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ vérifiant

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

pour tout z suffisamment proche de z_0. Ceci implique en particulier que le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est strictement positif. On dit que f est *analytique* sur Ω si elle est développable en série entière en tout point de Ω.

Remarques. D'après ce qui précède, le développement en série entière de f au point z_0 est unique. L'analycité peut d'ailleurs se reformuler ainsi : une fonction est analytique si elle est infiniment dérivable et elle coïncide localement avec son développement en série de Taylor infini. Le Théorème 16 montre que si f est analytique alors f est holomorphe, et que sa dérivée est encore analytique. Plus précisément le développement en série entière de f' s'obtient en dérivant terme à terme celui de f.

Exemples. Les polynômes en z sont analytiques, c'est une conséquence immédiate de la formule du binôme de Newton. La fonction $1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$. En effet, on fixe $z_0 \neq 0$, et on écrit

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0\left(1 + \frac{z-z_0}{z_0}\right)} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(z-z_0)^n}{z_0^{n+1}}.$$

Cette identité est valable si la série converge, c'est-à-dire si $|z - z_0| < |z_0|$. En particulier le développement est valable au voisinage de z_0.

Remarque. Il est évident que la somme de deux fonctions analytiques est analytique. On peut aussi montrer que le produit de deux fonctions analytiques est analytique, voir TD.

On va maintenant s'intéresser aux zéros d'une fonction analytique. Rappelons qu'on dit que $z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de $Z \subset \mathbb{C}$ s'il existe une suite (z_n) d'éléments de Z telle que $z_n \neq z$ pour tout n et $z_n \to z$. Par exemple l'ensemble $\{1/n,\, n \geq 1\}$ possède un point d'accumulation, le point 0.

Definition 18. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $Z \subset \Omega$. On dit que Z est un ensemble de points isolés dans Ω si Z ne possède pas de point d'accumulation dans Ω.

Remarque. Attention Z peut-être un ensemble de points isolés dans Ω et posséder un point d'accumulation en dehors de Ω. Par exemple $\{1/n,\, n \geq 1\}$ est un ensemble de points isolés de $\{\Re(z) > 0\}$, mais il possède un point d'accumulation en 0.

On aura besoin plus tard de la caractérisation suivante.

Lemme 19. *Un ensemble Z est un ensemble de points isolés dans Ω si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, l'ensemble $K \cap Z$ est fini.*

Démonstration. S'il existe un compact K inclus dans Ω tel que $Z \cap K$ est infini, alors il existe une suite (x_n) d'éléments de $Z \cap K$ deux à deux distincts. Comme K est compact on peut supposer quitte à extraire que (x_n) converge dans K. La limite est alors un point d'accumulation de Z dans Ω, ce qui montre le sens direct. Réciproquement si Z possède un point d'accumulation $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D(z_0, \epsilon)}$ soit inclus dans Ω. Ce disque est un compact inclus dans Ω et il est clair qu'il contient une infinité de points de Z. □

Théorème 20 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soit Ω un domaine et soit f analytique sur Ω. Si f n'est pas identiquement nulle, les zéros de f sont isolés dans Ω.*

Remarque. Autrement dit une fonction analytique est complètement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur un ensemble possédant un point d'accumulation dans Ω. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un ensemble possédant un point d'accumulation alors elles sont égales.

Démonstration. Soit X l'ensemble des éléments de Ω qui soient des points d'accumulation des zéros de f. Soit $z_0 \in X$ et soit (a_n) la suite des coefficients du développement en série entière de f en z_0. Supposons que les coefficients (a_n) ne sont pas tous nuls et posons $n_0 = \min\{n \geq 0\colon a_n \neq 0\}$. Pour z tendant vers z_0 on a alors

$$f(z) = \sum_{n\geq n_0} a_n(z-z_0)^n = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0} + O(|z-z_0|^{n+1}) \sim a_{n_0}(z-z_0)^{n_0}.$$

Mais ceci implique en particulier que pour z suffisamment proche mais distinct de z_0 on a $f(z) \neq 0$, ce qui contredit le fait que z_0 soit un point d'accumulation des zéros de f. Donc les a_n sont forcément tous nuls. Comme f coïncide avec son développement en série entière au voisinage de z_0, on en déduit que f est identiquement nulle au voisinage de z_0. En particulier, il existe un voisinage de z_0 contenu dans X. On a donc montré que X était ouvert. Par ailleurs il est évident que X est un fermé relatif de Ω. Par connexité on en déduit $X = \emptyset$ ou $X = \Omega$, et donc soit les zéros de f sont isolés, soit f est identiquement nulle. □

Remarque. La démonstration montre aussi que si f est analytique et non identiquement nulle, pour tout zéro z_0 de f, il existe un entier $n_0 \geq 1$ et une constante $a \neq 0$ telle que $f(z) \sim a(z - z_0)^{n_0}$ au voisinage de z_0. On dit que f possède un zéro d'*ordre* n_0 en z_0.

On va maintenant étudier deux fonctions holomorphes très importantes, l'exponentielle et le logarithme complexes. On commence avec l'exponentielle. La série $\sum_{n \geq 0} z^n/n!$ a un rayon de convergence infini, la somme de cette série est appelée fonction exponentielle, notée $\exp(z)$ où e^z. La fonction exponentielle est analytique (donc holomorphe) sur $\mathbb{C}$. On a aussi les propriétés suivantes.

Lemme 21. *Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :*

(i) $\exp'(z_1) = \exp(z_1)$ *;*

(ii) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

Démonstration. D'après le Théorème 16 on peut dériver terme à terme la série exponentielle, ce qui donne la première propriété. Pour la deuxième on écrit

$$\begin{aligned}\exp(z_1 + z_2) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{z_1^k}{k!} \left(\sum_{n \geq k} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \exp(z_1)\exp(z_2).\end{aligned}$$

Pour justifier que l'intervertion des deux sommes infinies est licite, il faut montrer que si on remplace z_1 et z_2 par leurs modules on obtient quelque chose de fini, ce qui se déduit facilement du fait que la série exponentielle a un rayon de convergence infini. Voir aussi l'exercice de TD sur le produit de Cauchy. □

En particulier $\exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy)$ ce qui montre qu'il suffit d'étudier exp sur $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$. Commençons par étudier la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Lemme 22. *La fonction exponentielle réalise une bijection croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0, +\infty[$.

Démonstration. Il est clair d'après la définition que si $x \in \mathbb{R}$ alors $\mathrm{e}^x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^0 = 1$ on voit que $\mathrm{e}^x \neq 0$, et comme $(\mathrm{e}^{x/2})^2 = \mathrm{e}^x$ on obtient $\mathrm{e}^x > 0$. De plus $\exp'(x) = \exp(x) > 0$. Donc la fonction exponentielle est strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Il est également clair d'après la définition que $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Comme $\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} = 1$, on en déduit aussi $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. □

On va maintenant étudier la fonction exponentielle sur $i\mathbb{R}$. Remarquons tout d'abord qu'il est clair d'après la définition et les propriétés de la conjugaison que $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$. Par conséquent pour x réel $|\mathrm{e}^{ix}|^2 = \mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-ix} = 1$. Donc la fonction exponentielle envoie $i\mathbb{R}$ sur le cercle unité. Pour étudier plus précisément l'exponentielle sur $i\mathbb{R}$ on introduit les fonctions trigonométriques

$$\cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i},$$

appelées respectivement cosinus et sinus. Elles admettent toutes un développement en série entière en 0 dont le rayon de convergence est infini :

$$\cos(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Notons aussi qu'elles sont toutes les deux holomorphes et qu'on a

$$\cos'(z) = -\sin(z) \quad \text{et} \quad \sin'(z) = \cos(z).$$

De plus, pour x réel, on a $\cos(x) = \Re(\mathrm{e}^{ix})$ et $\sin(x) = \Im(\mathrm{e}^{ix})$, et donc $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ceci implique en particulier pour tout x réel $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont compris entre -1 et 1.

Proposition 23. *La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{ix}$ est périodique, sa plus petite période strictement positive est notée 2π, c'est la définition de π. Sur $[0, \pi]$ le sinus est positif et le cosinus décroît de 1 à -1. Sur $[\pi, 2\pi]$ le sinus est négatif le cosinus croit de -1 à 1. En particulier e^{ix} fait le tour du cercle unité quand x décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$.*

Démonstration. Pour la périodicité, il suffit de montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\mathrm{e}^{ia} = 1$. En effet on aura alors $\mathrm{e}^{i(x+a)} = \mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{ia} = \mathrm{e}^{ix}$ pour tout x. Comme $\sin(0) = 0$ et $\sin'(x) = \cos(x) \leq 1$ on a $\sin(x) = \int_0^x \cos(t)\,dt \leq x$ pour tout $x \geq 0$. Donc $\cos(x) = 1 - \int_0^x \sin(t)\,dt \geq 1 - x^2/2$, ce qui donne $\sin(x) \geq x - x^3/6$ puis $\cos(x) \leq 1 - x^2/2 + x^4/24$. On en déduit que $\cos(\sqrt{3}) < 0$. Comme $\cos(0) = 1$ le théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'existence de $x_0 \in]0, \sqrt{3}[$ vérifiant $\cos(x_0) = 0$. Donc $\mathrm{e}^{ix_0} = \pm i$ et donc $\mathrm{e}^{i4x_0} = (\mathrm{e}^{ix_0})^4 = 1$, ce qui montre que $4x_0$ est une période. Montrons maintenant que $\mathrm{e}^{ix_0} = +i$ et que $4x_0$ est la période minimale. En utilisant $\sin(x) \geq x - x^3/6$ on voit que le sinus est strictement positif $]0, \sqrt{6}[$. En particulier $\sin(x_0) > 0$ donc $\mathrm{e}^{ix_0} = i$. S'il existait une période strictement plus petite que $4x_0$ alors il existerait $x_1 \in]0, x_0[$ vérifiant $\mathrm{e}^{i4x_1} = 1$, et donc $\mathrm{e}^{ix_1} \in \{1, -1, i, -i\}$. C'est impossible, puisque sur l'intervalle $]0, x_0[$ le sinus est strictement positif, donc le cosinus est strictement décroissant, donc compris entre 0 et 1 strictement. On a donc montré $x_0 = \pi/2$ et $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i$. On en déduit $\mathrm{e}^{i\pi} = (\mathrm{e}^{i\pi/2})^2 = -1$, donc $\sin(\pi) = 0$ et $\cos(\pi) = -1$. On montre par un raisonnement similaire que le sinus ne peut pas s'annuler sur $]0, \pi[$, donc il ne change pas de signe, donc il est strictement positif, puisqu'on a vu que $\sin(\pi/2) = 1$. Donc le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi]$, et il décroît de 1 à -1. L'étude sur $[\pi, 2\pi]$ se déduit de celle sur $[0, \pi]$ en remarquant que $\mathrm{e}^{i(\pi+x)} = \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{ix} = -\mathrm{e}^{ix}$. ☐

Corollaire 24. *L'image de $\mathbb{C}$ par la fonction exponentielle est $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. L'exponentielle complexe n'est pas injective, plus précisément on a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^{z-z} = 1$, ce qui montre que $\mathrm{e}^z \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. D'après ce qui précède il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^t = |z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{i\theta} = z/|z|$. Donc $\mathrm{e}^{t+i\theta} = z$. Pour la deuxième partie on remarque d'abord que $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{z-z'} = 1$. Il s'agit donc de résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = 1$. On écrit $z = x + iy$ et on prend le module de l'équation. On voit alors que $x = 0$ et que y est un multiple entier de 2π, ce qui est le résultat annoncé. ☐

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle *argument* de z tout réel θ vérifiant $\mathrm{e}^{i\theta} = z/|z|$. Ce qui précède montre que l'argument de z n'est défini à un multiple de 2π près. On pourrait définir l'argument comme un élément du groupe quotient $\mathbb{R}/(2\pi)\mathbb{Z}$ mais nous n'utiliserons pas ce formalisme ici.

On appelle logarithme réel, noté log, la réciproque de l'exponentielle réelle. C'est donc une fonction croissante et bijective de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Les propriétés de l'exponentielle donnent immédiatement :

Lemme 25. *Pour tous $s, t > 0$ on a $\log'(t) = 1/t$ et $\log(st) = \log(s) + \log(t)$.*

On va maintenant étendre le logarithme aux nombres complexes. On veut que le logarithme vérifie la propriété $\exp(\log z) = z$. Comme la fonction exponentielle évite 0 on voit déjà qu'il ne sera pas possible de définir $\log 0$. En prenant le module et l'argument de cette égalité on voit aussi qu'on doit avoir $\log z = \log|z| + i\arg(z)$. Le problème est que l'argument de z n'est défini qu'à un multiple de 2π près. Il faut donc imposer une condition sur la manière de choisir cet argument. Par exemple on peut décider de choisir l'argument dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. Mais on se retrouve alors avec une fonction logarithme qui n'est même pas continue sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. En effet on a par exemple $\log(1) = 0$ et $\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \log(1 - i\varepsilon) = 2i\pi$. Ces considérations motivent la définition suivante.

Definition 26. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ ne contenant pas 0, on dit que $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est une *détermination du logarithme* sur Ω si f est continue et si $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \Omega$.

Lemme 27. *Soit Ω un domaine ne contenant pas 0, soit f une détermination du logarithme sur Ω et soit k un entier relatif. Alors $f + 2ik\pi$ est encore une détermination du logarithme sur Ω. Réciproquement deux déterminations du logarithme sur un domaine diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$.*

Démonstration. Le sens direct est immédiat. Réciproquement si f et g sont deux déterminations du logarithme alors $\mathrm{e}^{f(z)} = \mathrm{e}^{g(z)}$ donc $f(z) - g(z) \in (2i\pi)\mathbb{Z}$ pour tout $z \in \Omega$. Comme $f - g$ est continue et Ω connexe on en déduit que $f - g$ est constante. ☐

Proposition 28. *Soit Ω un domaine ne contenant pas 0. Si f est une détermination du logarithme sur Ω alors f est holomorphe sur Ω et vérifie $f'(z) = 1/z$ pour tout z. Réciproquement si f est holomorphe et vérifie $f'(z) = 1/z$ pour tout $z \in \Omega$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) + \alpha$ soit une détermination du logarithme sur Ω.*

Remarques. En particulier l'existence d'une détermination du logarithme sur un domaine est équivalente à l'existence d'une primitive de $1/z$. Comme $1/z$ est analytique on peut aussi en déduire que les déterminations du logarithme sont analytiques. En effet on a vu en TD qu'une primitive d'une fonction analytique est analytique.

Démonstration. On sait que $\lim_{y\to y_0}(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{y_0})/(y - y_0) = \mathrm{e}^{y_0}$. Si f est une détermination du logarithme, alors f est continue par hypothèse et donc $f(z) \to f(z_0)$ quand $z \to z_0$. Donc par composition des limites

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{\mathrm{e}^{f(z)} - \mathrm{e}^{f(z_0)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{f(z_0)}} = \frac{1}{z_0}.$$

Donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 de dérivée $1/z_0$. Réciproquement, si f est holomorphe et vérifie $f'(z) = 1/z$ alors

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{f(z)}}{z}\right)' = \frac{f'(z)\mathrm{e}^{f(z)}z - \mathrm{e}^{f(z)}}{z^2} = 0.$$

Une fonction de dérivée nulle sur un domaine étant constante on en déduit $\mathrm{e}^{f(z)} = \lambda z$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$. La constante λ est forcément non nulle et on peut s'en débarrasser en ajoutant une constante adéquate à f. □

On verra plus tard une caractérisation des domaines Ω sur lesquels il existe une détermination du logarithme. Pour l'instant on va se contenter de définir une détermination particulière, appelée détermination principale du logarithme.

Definition 29. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, on note $\theta(z)$ l'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi[$. Notons que l'argument de z ne peut pas être π puisqu'on a exclu les réels négatifs. Alors la fonction f donnée par

$$f(z) = \log(|z|) + i\theta(z)$$

est une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, appelée détermination principale du logarithme.

Remarques. On peut caractériser la détermination principale du logarithme de la manière suivante : c'est l'unique fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ qui coïncide avec le logarithme usuel sur $]0;+\infty[$. Le fait que la détermination principale du logarithme soit analytique se déduit des remarques ci-dessus. L'unicité est une conséquence immédiate du principe du prolongement analytique : remarquer que tous les points de la demi-droite $]0,\infty[$ sont des points d'accumulation d'elle-même dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. On peut essayer d'étendre f à $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ en posant par exemple $\theta(z) = \pi$ pour z réel strictement négatif. Mais f n'est plus une détermination du logarithme : en effet la propriété $\exp(f(z)) = z$ reste vraie, mais f n'est plus continue : elle n'est pas continue sur la demi-droite des réels strictement négatifs. On verra plus tard qu'il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

3 Intégrale curviligne, formule de Cauchy

Definition 30. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et soit f une fonction continue sur l'image de γ. On pose

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Cette quantité est appelée intégrale curviligne de f le long de γ. Plus généralement, si γ est seulement continu et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, au sens où il existe une subdivision de $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que γ soit $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$, on pose alors

$$\int_\gamma f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

On dira par ailleurs que le chemin est *fermé* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Remarque. Soit $\varphi\colon [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a,b]$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ et posons $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. La formule du changement de variable montre que $\int_\gamma f = \int_{\tilde{\gamma}} f$. Autrement dit, l'intégrale curviligne le long de γ ne change pas lorsque l'on change la paramétrisation de γ. Attention, l'intégrale curviligne est multipliée par -1 si φ est décroissante. Autrement dit l'intégrale curviligne change de signe lorsqu'on change le sens de parcours du chemin γ.

Exemples. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on considère le chemin $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)z_1 + tz_2$ qui parcourt le segment $[z_1, z_2]$, en partant de z_1 et en arrivant à z_2. On parlera dans la suite de segment orienté et on le notera parfois $z_1 \to z_2$. On a donc

$$\int_\gamma f = (z_2 - z_1) \int_0^1 f((1-t)z_1 + tz_2)\,dt.$$

Un cercle centré en z_0 de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique peut être paramétré par $\widetilde{\gamma} \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{i\theta}$, ce qui donne

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f = ir \int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{r}e^{i\theta})\mathrm{e}^{i\theta}\,d\theta.$$

Remarque. Il faut bien comprendre que l'intégrale curviligne n'est pas une intégrale au sens de théorie de la mesure. D'ailleurs certains auteurs utilise le symbole $\oint$ bien marquer cette distinction. On ne le fera pas dans ce cours mais il faut bien avoir en tête que dans la formule précédente le signe $\int$ n'a pas la même signification à droite et à gauche. Par exemple, s'il est clair d'après la définition que l'intégrale curviligne est linéaire : $\int_\gamma (f+g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$, elle n'est en revanche pas positive : il n'est pas vrai en général que si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ alors $\int_\gamma f$ est un réel positif. De même l'inégalité $|\int_\gamma f| \le \int_\gamma |f|$ est en générale fausse. En fait la bonne manière de penser l'intégrale curviligne est de la voir non pas comme intégrale mais comme une primitive le long d'un chemin, on donnera un sens précis à cette notion un peu plus loin.

Rappelons qu'étant donnée $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, on dit que F est une primitive de f sur Ω si F est holomorphe sur Ω et si $F' = f$.

Théorème 31. *Soit Ω un domaine et soit f continue sur Ω et soit $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Si f admet une primitive F sur Ω alors $\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. En particulier $\int_\gamma f = 0$ si γ est un chemin fermé. Réciproquement, si l'intégrale de f le long de tout chemin fermé à valeurs dans Ω est nulle alors f admet une primitive sur Ω.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que γ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Dans ce cas $F \circ \gamma$ aussi par composition et $(F \circ \gamma)' = (F' \circ \gamma)\gamma' = (f \circ \gamma)\gamma'$. D'après le théorème fondamental de l'analyse on obtient

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Si γ est seulement $\mathcal{C}^1$ par morceaux, en découpant $[a,b]$ en intervalles sur lesquels γ est $\mathcal{C}^1$, on voit que cette égalité reste valable. Si de plus γ est un chemin fermé, c'est-à-dire si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on obtient bien $\int_\gamma f = 0$.

Pour la réciproque on fixe $a \in \Omega$ et pour $z \in \Omega$ on pose $F(z) = \int_\gamma f$ où γ est n'importe quel chemin $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans Ω joignant a à z. L'existence d'un tel chemin γ provient de la connexité de Ω. Pour que F soit bien définie, il faut cependant que l'intégrale ne dépende pas du chemin γ choisi pour relier a à z. Mais si $\tilde{\gamma}$ est un autre chemin joignant a à z, la quantité $\int_\gamma f - \int_{\tilde{\gamma}} f$ est l'intégrale de f le long d'un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux et fermé, elle est donc nulle par hypothèse. On fixe maintenant $z_0 \in \Omega$ et un chemin γ_0 joignant a à z_0. Pour z suffisamment proche de z_0, on ajoute le segment orienté $[z_0, z]$ au chemin γ. On obtient alors un chemin à valeurs dans Ω joignant a à z. Par conséquent

$$F(z) - F(z_0) = \int_{z_0 \to z} f = (z - z_0) \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\, dt.$$

Mais la continuité de f en z_0 implique clairement que $\int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\, dt \to f(z_0)$ quand $z \to z_0$. Ce qui montre bien que F est dérivable en z_0 de dérivée $f(z_0)$. □

Corollaire 32. *La fonction $1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$. Il n'existe donc pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.*

Démonstration. Soit γ le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique. Alors γ est un chemin fermé à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{i\mathrm{e}^{i\theta}\, d\theta}{\mathrm{e}^{i\theta}} = 2i\pi \neq 0.$$

Si $1/z$ admettait une primitive globale sur $\mathbb{C}^*$ cette intégrale devrait être nulle d'après le théorème qui précède. □

Remarque. Notons en revanche que si n est un entier relatif différent de -1 fonction $z \mapsto z^n$ admet une primitive globale sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, donnée par $z \mapsto z^{n+1}/(n+1)$. En particulier son intégrale le long de tout chemin fermé à valeurs dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ est nulle. Si γ parcourt le cercle unité dans le sens trigonométrique on a donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma z^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = -1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Exemple (Une démonstration astucieuse du théorème de Cayley-Hamilton)**.** Soit A une matrice $n \times n$ et soit $\chi(z) = \det(A - zI)$ son polynôme caractéristique. On veut montrer que $\chi(A) = 0$. Soit γ le chemin parcourant le cercle centré en 0 et de rayon R dans le sens trigonométrique. On choisit R suffisamment grand pour que $R > \|A\|$ (norme d'opérateur). En particulier $A - zI$ est inversible pour tout z de module R. On a effet pour un tel z

$$(A - zI)^{-1} = -\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{z^{n+1}}.$$

Noter que la série est normalement convergente puisque $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ et $|z| = R > \|A\|$. Pour tout entier n on a alors en appliquant Fubini et la remarque précédente

$$\int_\gamma z^n (A - zI)^{-1} = -\int_\gamma \sum_{k \geq 0} z^{n-k-1} A^k = -\sum_{k \geq 0} \left(\int_\gamma z^{n-k-1} \right) A^k = -(2i\pi) A^n.$$

Dans cette égalité on considère des intégrales curvilignes à valeurs matricielles, qu'il faut comprendre coordonnée par coordonnée. C'est-à-dire que si $B(z)$ est une fonction de z à valeurs matricielles $\int_\gamma B(z)$ est la matrice dont la coordonnée ij vaut $\int_\gamma B_{ij}(z)$. Par linéarité on en déduit

$$\int_\gamma P(z)(A - zI)^{-1} = -2i\pi P(A)$$

pour tout polynôme P. Remarquons maintenant que les coefficients de la matrice $\det(A - zI)(A - zI)^{-1}$ sont tous des polyômes en z. En effet d'après la formule des cofacteurs pour l'inverse d'une matrice, à un signe près, le coefficient ij est le mineur ji de la matrice $A - zI$. Mais un polynôme en z possède toujours une primitive globale sur $\mathbb{C}$, donc son intégrale le long de tout chemin fermé est nulle. Par conséquent $\int_\gamma \chi(z)(A - zI)^{-1} = 0$ ce qui termine la preuve.

Le résultat suivant est notre premier véritable théorème sur les fonctions holomorphes, et toute la théorie de l'analyse complexe en découle, il est donc particulièrement important. Étant donné un triangle Δ inclus dans $\mathbb{C}$ on note $\partial\Delta$ le chemin parcourant la frontière du triangle dans le sens trigonométrique, ce chemin est donc composé de trois segments orientés. Il s'agit d'un petit abus de notation puisque $\partial\Delta$ désigne généralement la frontière en tant qu'ensemble et pas en tant que chemin orienté.

Théorème 33 (Théorème de Goursat)**.** *Soit Ω un domaine et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors pour tout triangle Δ contenu dans Ω on a $\int_{\partial\Delta} f = 0$.*

Remarque. Attention, l'hypothèse est bien que le triangle est intégralement contenu dans Ω, il ne suffit pas que le bord du triangle le soit.

Démonstration. On considère les segments joignant les milieux des trois côtés de Δ. On obtient ainsi un découpage de Δ en quatre triangles qu'on appelle D_1, D_2, D_3, D_4. On a alors l'égalité

$$\int_{\partial\Delta} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial D_i} f.$$

En effet, dans le membre de droite les segments orientés intérieurs à Δ sont parcourus une fois dans chaque sens et ont donc une contribution nulle (faire un dessin). On choisit parmi les D_i le triangle pour lequel $|\int_{D_i} f|$ est maximal et on l'appelle Δ_1. On a donc

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left|\int_{\partial D_i} f\right| \leq 4 \left|\int_{\partial\Delta_1} f\right|.$$

Notons aussi que les côtés de Δ_1 sont de longueur moitié par rapport à ceux de Δ. Ensuite on itère la procédure. On obtient donc une suite de triangles (Δ_n) décroissante pour l'inclusion vérifiant $\mathrm{diam}(\Delta_n) = C2^{-n}$ pour une certaine constante C et

$$\left|\int_{\partial\Delta} f\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f\right|, \tag{1}$$

pour tout entier n. Comme les (Δ_n) forment une suite décroissante de compacts non vide leur intersection est non vide, et comme leurs diamètres tendent vers 0 cette intersection est réduite à un point, qu'on appelle z_0. On utilise maintenant l'hypothèse : f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, et on observe que quitte à remplacer la fonction f par $z \mapsto f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$ on peut supposer que $f(z_0)$ et $f'(z_0)$ sont nuls. En effet la fonction $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ admet une primitive globale sur $\mathbb{C}$, donc son intégrale le long de tout chemin fermé est nulle. Donc pour tout triangle Δ' inclus dans Ω

$$\int_{\partial\Delta'} f(z) = \int_{\partial\Delta'} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)).$$

On suppose donc désormais que $f(z_0) = f'(z_0) = 0$. On a donc $f(z) = o(|z - z_0|)$ quand z tend vers z_0. On fixe maintenant $\varepsilon > 0$. Pour tout n et pour tout z appartenant à Δ_n on a $|z - z_0| \leq C2^{-n}$ et donc $|f(z)| \leq C\varepsilon 2^{-n}$ si n est suffisamment grand. En appelant $[a_n, b_n]$ l'un des trois segments qui composent $\partial\Delta_n$ et en utilisant les inégalités qui précèdent on obtient

$$\begin{aligned} \left|\int_{a_n \to b_n} f\right| &= \left|(b_n - a_n) \int_0^1 f((1-t)a_n + tb_n)\, dt\right| \\ &\leq |b_n - a_n|\, C\varepsilon 2^{-n} \leq C^2 \varepsilon 4^{-n}. \end{aligned}$$

Donc $\left|\int_{\partial\Delta_n} f\right| \leq C'\varepsilon 4^{-n}$ pour n suffisamment grand et pour une certaine constante C'. En reportant dans (1) on obtient $\left|\int_{\partial\Delta} f\right| \leq C'\varepsilon$, ce qui donne bien le résultat en faisant tendre ε vers 0. □

On va utiliser le théorème de Goursat de la manière suivante.

Corollaire 34. *Une fonction holomorphe sur un domaine Ω admet une primitive sur tout disque inclus dans Ω. En particulier elle admet une primitive au voisinage de chaque point de Ω.*

Démonstration. Soit $D = D(a, r)$ un disque inclus dans Ω. Pour tout z dans le disque on note $F(z)$ l'intégrale de f le long du segment orienté $[a, z]$. Montrons que F est une primitive de f sur D. Soient $z_0, z \in D$, comme par hypothèse l'intégrale de f autour du triangle de sommets a, z_0, z est nulle on obtient

$$F(z) - F(z_0) = \int_{z_0 \to z} f = (z - z_0) \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\, dt,$$

en notant $z_0 \to z$ le segment orienté allant de z_0 à z. Il n'y a plus qu'à montrer que $\int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\, dt = f(z_0) + o(1)$ ce qui se déduit très facilement de la continuité de f en z_0. □

Remarque. En revanche, une fonction holomorphe n'admet pas forcément de primitive globale, on a en effet vu que $1/z$ n'admettait pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Definition 35. Soit Ω un domaine, soit f une fonction continue sur Ω et soit $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ un chemin continu. On ne suppose pas que γ est $\mathcal{C}^1$, ni même $\mathcal{C}^1$ par morceaux . On dit que $F\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ est une primitive de f le long de γ si F est localement la composée du chemin γ par une primitive de f. Plus précisément, pour tout $t_0 \in [a, b]$ il existe un ouvert U de $\mathbb{C}$ vérifiant $\gamma(t_0) \in U \subset \Omega$, et une primitive G de f sur U telle qu'on ait $F(t) = G(\gamma(t))$ pour t dans un voisinage de t_0.

Remarques. Attention cette notion peut être un peu déroutante la première fois : la fonction f est définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ mais la primitive le long de γ est définie sur l'intervalle $[a, b]$. Il est clair que la notion de primitive le long d'un chemin est linéaire : si F et G sont des primitives respectives de f et g le long d'un même chemin γ alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ le long de γ.

Si f admet une primitive globale sur le domaine alors il est clair qu'elle admet une primitive le long de tout chemin, il suffit de composer le chemin par la primitive. Mais on peut avoir existence d'une primitive le long d'un chemin sans qu'il y ait existence d'une primitive globale, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soit $\gamma\colon \theta \in [0; 2\pi] \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}$ le chemin faisant le tour du cercle unité dans le sens trigonométrique. Montrons que $1/z$ admet une primitive le long de γ. Plus précisément on va montrer que $F\colon \theta \in [0, 2\pi] \mapsto i\theta$ est une primitive de $1/z$ le long de γ. Soit G_1, G_2, G_3 les déterminations du logarithme obtenues en choisissant l'argument dans les intervalles $]-\pi; \pi[$, $]0, 2\pi[$, et $]\pi; 3\pi[$ respectivement. Noter que G_1 et G_3 sont définies sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ tandis que G_2 est définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$. Alors G_1, G_2, G_3 sont toutes les trois des primitives de $1/z$ sur leurs domaines de définition respectifs. De plus on a $F(\theta) = G_1(\mathrm{e}^{i\theta})$ sur $[0, \pi[$, $F(\theta) = G_2(\mathrm{e}^{i\theta})$ sur $]0, 2\pi[$ et $F(\theta) = G_3(\mathrm{e}^{i\theta})$ sur $]\pi, 2\pi]$. Donc F est bien égale à la composition de γ par une primitive de $1/z$ au voisinage de chaque point de l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Théorème 36. *Soit Ω un domaine, soit f une fonction holomorphe sur Ω et soit γ un chemin continu. Alors f admet une primitive le long de γ. De plus cette primitive est unique à une constante additive près.*

Démonstration. Si f admet une primitive globale G sur Ω, alors le résultat est facile, il suffit de poser $F = G \circ \gamma$. Si f n'admet pas de primitive globale, il faut faire ceci localement et recoller les morceaux entre eux. Supposons pour simplifier que γ est indexé par $[0, 1]$. Comme l'image de γ est compacte, il existe $\varepsilon > 0$ tel que tous les points de l'image de γ soient à distance ε au moins du bord de Ω. On fixe un entier n, et on subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en posant $t_i = i/n$ pour tout $i = 0, \ldots, n$. On pose aussi $D_i = D(\gamma(t_i), \varepsilon)$, noter que $D_i \subset \Omega$ par définition de ε. De plus, par uniforme continuité, si n est suffisamment grand on a $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i$ pour tout i. On va maintenant définir récursivement une suite de primitives locales de f. On commence par se donner une primitive de f sur D_1 qu'on note G_1. Cette primitive existe puisqu'on a vu qu'une fonction holomorphe sur un disque admettait des primitives sur ce disque. Ensuite on note G_2 la primitive de f sur D_2 qui coïncide avec G_1 sur $D_1 \cap D_2$. Noter en effet que $D_1 \cap D_2$ est un ouvert connexe non vide, donc deux primitives de f sur cet ensemble diffèrent d'une constante. Soit ensuite G_3 la primitive de f sur D_3 qui coïncide avec G_2 sur $D_3 \cap D_2$, et ainsi de suite. Enfin, on pose $F(t) = G_i(\gamma(t))$ pour tout $t \in [t_{i-1}, t_i]$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$. Alors F est bien définie puisque si t est au bord de l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, par exemple si $t = t_i$ on a $G_i(\gamma(t_i)) = G_{i+1}(\gamma(t_i))$ par construction. De plus F est bien égale à la composée du chemin γ par une primitive de f au voisinage de chaque point, ce qui achève la preuve de l'existence. Pour l'unicité, il suffit d'après la linéarité de montrer que si F est une primitive de la fonction nulle le long de γ alors F est constante. Or il est clair d'après la définition qu'une primitive de la fonction nulle le long de γ est localement constante, c'est-à-dire constante au voisinage de chaque point de $[0,1]$. Mais comme l'intervalle $[0,1]$ est connexe, une fonction localement constante sur $[0,1]$ est constante, ce qui termine la preuve. □

Remarque. Dans cette démonstration, on n'a pas vraiment utilisé l'holomorphie de f, on a seulement utilisé le fait que f admettait une primitive sur tout disque inclus dans le domaine. Mais on verra plus tard que cette dernière condition est en fait équivalente à l'holomorphie.

Pour les fonctions holomorphes on peut maintenant définir l'intégrale curviligne d'une deuxième manière.

Definition 37. Soit f holomorphe sur un domaine Ω et soit $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ un chemin continu à valeur dans Ω. On pose $\int_\gamma f = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f le long de γ. Ceci ne dépend pas de la primitive choisie puisque deux primitives de f le long de γ diffèrent d'une constante.

Lemme 38. *Cette nouvelle notion d'intégrale curviligne coïncide avec l'ancienne si le chemin γ est $\mathcal{C}^1$, ou continu et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*

Démonstration. Si γ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et si F est une primitive de f le long de γ alors F est $\mathcal{C}^1$ par composition et $F'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ pour tout t. On en déduit bien $F(b) - F(a) = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ par le théorème fondamental de l'analyse. Ce raisonnement s'applique aussi si γ est continu et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. □

On notera aussi que cette nouvelle notion d'intégrale curviligne reste linéaire : $\int_\gamma (f+g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$.

La notion qui suit joue un rôle important dans la suite.

Definition 39. On appelle *homotopie* toute application continue $H\colon [0,1]^2 \to \mathbb{C}$. Étant donnée une fonction continue f définie dans un voisinage de l'image de H, on dit que $F\colon [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ est une primitive de f le long de H si localement F est la composée de H par une primitive de f : pour tout $(s_0,t_0) \in [0,1]^2$ il existe un ouvert U de $\mathbb{C}$ vérifiant $H(s_0,t_0) \in U \subset \Omega$ et une primitive G de f sur U telle que $F(s,t) = G \circ H(s,t)$ pour (s,t) au voisinage de (s_0,t_0).

Remarque. On suppose pour simplifier que les homotopies sont indexées par $[0,1]^2$ mais on pourrait aussi plus généralement considérer des homotopies indexées par $[a,b] \times [c,d]$.

Théorème 40. *Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et soit H une homotopie à valeurs dans Ω alors f admet une primitive le long de H. Cette primitive est de plus unique à constante additive près.*

Démonstration. La preuve est très similaire à celle de l'existence d'une primitive le long d'un chemin. On se donne un entier n et on découpe le carré $[0,1]^2$ en petits carrés de côté $1/n$: on pose $C_{i,j} = [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n]$ pour tous $i,j = 1,\dots,n$. Encore une fois, par compacité et uniforme continuité, si n est assez grand, pour tous i,j il existe un disque ouvert $D_{i,j}$ vérifiant $H(C_{i,j}) \subset D_{i,j} \subset \Omega$. La fonction f étant holomorphe, elle admet une primitive sur chacun des disques $D_{i,j}$. On va maintenant s'arranger pour que ces primitives locales se recollent bien. On se donne d'abord une primitive arbitraire $G_{1,1}$ de f sur $D_{1,1}$. Ensuite on définit récursivement $G_{i+1,1}$ comme la primitive de f sur $D_{i+1,1}$ qui coïncide avec $G_{i,1}$ sur $D_{i,1}$. Enfin, pour tout i fixé, on définit récursivement $G_{i,j+1}$ comme la primitive de f sur $D_{i,j+1}$ qui coïncide avec $G_{i,j}$ sur $D_{i,j}$. Montrons que cette construction implique aussi que $G_{i,j}$ et $G_{i+1,j}$ coïncident sur $D_{i,j} \cap D_{i+1,j}$ pour tous i,j (là il faut vraiment faire un dessin). On raisonne par récurrence sur j. Par construction la propriété est vraie pour $j=1$. On suppose que la propriété est vraie au rang j et on cherche à la montrer au rang $j+1$. Remarquons d'abord que puisque $G_{i,j+1}$ et $G_{i+1,j+1}$ sont deux primitives de f, elles diffèrent d'une constante sur $D_{i,j+1} \cap D_{i+1,j+1}$. Pour montrer que cette constante est nulle il suffit de montrer que les deux fonction coïncident en un point, par exemple au point $H(t_i,t_j)$, en posant $t_i = i/n$ pour tout i. Remarquons maintenant que $H(t_i,t_j) \in D_{i,j} \cap D_{i,j+1} \cap D_{i+1,j} \cap D_{i+1,j+1}$. On obtient alors le résultat cherché en écrivant

$$G_{i,j+1}(H(t_i,t_j)) = G_{i,j}(H(t_i,t_j)) = G_{i+1,j}(H(t_i,t_j)) = G_{i+1,j+1}(H(t_i,t_j)).$$

Dans cette série d'égalités les deux égalités externes sont vraies par construction, et l'égalité centrale résulte de l'hypothèse de récurrence. Une fois qu'on a fait cette construction on peut poser $F(s,t) = G_{ij} \circ H(s,t)$

pour tout $(s,t) \in C_{i,j}$ et pour tous i et j. Ceci est bien défini puisque si (s,t) appartient au bord de $C_{i,j}$, par exemple à $C_{i,j} \cap C_{i+1,j}$ alors $G_{i,j}(H(s,t)) = G_{i+1,j}(H(s,t))$ d'après ce qui précède, et de même pour les autres bords. De plus au voisinage de chaque point, la fonction F s'écrit bien comme la composée de H par une primitive de f. Encore une fois l'unicité s'obtient par un argument de connexité. □

Il faut penser à une homotopie comme à une déformation de chemins. On déforme progressivement $t \mapsto H(0,t)$ en $t \mapsto H(1,t)$. On dit alors que ces deux chemins sont *homotopes*. La définition suivante précise cette notion.

Definition 41. Soit Ω un domaine et soient γ_0 et γ_1 deux chemins fermés à valeurs dans Ω, tous deux indexés par $[0,1]$. Ils sont dits homotopes comme chemins fermés dans Ω s'il existe une homotopie H à valeurs dans Ω vérifiant les conditions suivantes

1. $H(0,t) = \gamma_0(t)$ pour tout $t \in [0,1]$;
2. $H(1,t) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in [0,1]$;
3. $H(s,0) = H(s,1)$ pour tout $s \in [0,1]$ (autrement dit $t \mapsto H(s,t)$ est un chemin fermé pour tout s).

Si de plus le chemin γ_1 est un chemin constant, on dit alors que le chemin γ_0 est homotope à un point dans Ω, ou encore que c'est un chemin *contractile*.

Intuitivement, deux chemins fermés sont homotopes dans Ω si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation progressive sans sortir de Ω et sans "ouvrir" le chemin. Un chemin est contractile si on peut le rétracter en un point, sans sortir de Ω et sans l'ouvrir.

Remarque. Le fait que les chemins soient indexés par $[0,1]$ n'est pas une vraie restriction, si les chemins γ_0 et γ_1 sont indexés par un autre intervalle (pas forcément le même pour les deux) on peut toujours les ramener sur $[0,1]$ par un changement de variable.

Exemple. Soit $\gamma\colon \theta \in [0,2\pi] \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}$ le chemin faisant le tour du cercle unité dans le sens trigonométrique. Alors γ est contractile dans $\mathbb{C}$. On voit en effet que l'homotopie $H(s,\theta) = (1-s)\gamma(\theta)$ contracte le chemin γ au point 0. En fait ce raisonnement montre que n'importe quel chemin fermé est contractile dans $\mathbb{C}$. En revanche le chemin γ n'est pas contractile dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. En effet il est assez clair intuitivement que pour le contracter en un point sans toucher 0 il faut nécessairement ouvrir le chemin. On démontre ce fait de manière plus formelle un peu plus loin.

Le théorème suivant est absolument fondamental.

Théorème 42 (Formule de Cauchy)**.** *Soit Ω un domaine, soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, et soient γ_0 et γ_1 deux chemins homotopes comme chemins fermés dans Ω. Alors $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$. En particulier, si γ est un chemin fermé contractile dans Ω alors $\int_\gamma f = 0$.*

Démonstration. Soit H une homotopie vérifiant les trois conditions de la Définition 41 et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. D'après le théorème précédent f admet une primitive F le long de H. Ceci implique en particulier que $t \mapsto F(0,t)$ est une primitive de f le long de γ_0. Donc

$$\int_{\gamma_0} f = F(0,1) - F(0,0).$$

De même $t \mapsto F(1,t)$ est une primitive de f le long de γ_1 donc $\int_{\gamma_1} f = F(1,1) - F(1,0)$. D'un autre côté, on sait que l'homotopie H vérifie $H(s,0) = H(s,1)$ pour tout s. Appelons α le chemin donné par $\alpha(s) = H(s,0) = H(s,1)$ pour tout $s \in [0,1]$ (faire un dessin). Alors $s \mapsto F(s,0)$ est une primitive de f le long de α, et $s \mapsto F(s,1)$ aussi. Par conséquent $\int_\alpha f = F(1,0) - F(0,0) = F(1,1) - F(0,1)$. En réorganisant les termes on obtient $F(0,1) - F(0,0) = F(1,1) - F(1,0)$, ce qui est le résultat cherché. □

Remarques.
1. On peut maintenant démontrer formellement que le chemin γ faisant le tour du cercle unité n'est pas contractile dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. En effet $1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et $\int_\gamma 1/z = 2i\pi \neq 0$. Si γ était contractile dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, ceci contredirait la formule de Cauchy.

2. Cet exemple montre que pour que l'intégrale d'une fonction f le long d'un chemin fermé soit nulle il ne suffit pas que cette fonction soit holomorphe au voisinage du chemin. Pour pouvoir appliquer la formule de Cauchy elle doit être holomorphe sur un domaine suffisamment grand pour contenir une homotopie qui contracte le chemin.
3. Le théorème de Goursat est contenu dans la formule de Cauchy. Il est en effet clair que si un triangle est complètement contenu dans le domaine, le chemin parcourant le bord de ce triangle dans le sens trigonométrique est contractile dans le domaine.
4. Si on regarde bien la démonstration de la formule de Cauchy on peut voir que la seule propriété des fonctions holomorphes qu'on a utilisée est celle d'admettre des primitives locales. De plus on a vu (Corollaire 34) qu'une fonction continue vérifiant la conclusion du théorème de Goursat admettait des primitives locales. On peut donc en déduire le fait suivant : une fonction continue vérifiant la conclusion du théorème de Goursat vérifie la conclusion du théorème de Cauchy. Autrement dit, si une fonction continue sur un domaine est d'intégrale nulle le long du bord de tout triangle contenu dans le domaine, alors elle est en fait d'intégrale nulle le long de tout chemin fermé contractile dans le domaine. Nous utiliserons cette remarque un peu plus loin.

On a vu qu'un chemin qui tourne autour d'un point n'est pas contractile dans $\mathbb{C}$ privé de ce point. On va maintenant donner un sens précis à la notion de chemin tournant autour d'un point.

Proposition 43. *Soit γ un chemin fermé et soit z_0 n'appartenant pas à l'image de γ. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

est un entier relatif, appelé indice de γ par rapport à z_0, noté $n_{z_0}(\gamma)$.

Démonstration. On suppose pour simplifier que le chemin γ est indexé par $[0,1]$. On sait d'après le Théorème 36 qu'il existe une primitive de primitive de $1/(z-z_0)$ le long de γ. On reprend la démonstration de ce résultat et on remarque que quitte à ajouter une constante aux fonctions $G_1,\dots,G_n$ on peut supposer que ces fonctions sont des déterminations du logarithme de $z-z_0$. Alors par définition

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0} = F(1)-F(0) = G_n(\gamma(1)) - G_1(\gamma(0)) = G_n(a) - G_1(a),$$

en posant $a=\gamma(0)=\gamma(1)$. Mais comme G_1 et G_n sont deux déterminations du logarithme de $z-z_0$ au voisinage de a elles diffèrent d'un multiple entier de $2i\pi$, ce qui donne le résultat. ☐

Exemple. Si γ fait le tour du cercle unité dans le sens trigonométrique on a $n_\gamma(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} i\,d\theta = 1$. On va voir que de manière générale l'indice d'un chemin par rapport à un point est le nombre algébrique de tours que fait le chemin autour du point, en comptant $+1$ pour chque tour dans le sens trigonométrique et -1 pour chaque tour dans le sens horaire.

On va maintenant donner quelques propriétés de l'indice.

Lemme 44 (Invariance par translation). *Soit γ un chemin fermé et soit a un point n'appartenant pas à l'image de γ. Alors l'indice de γ par rapport à a est égal à l'indice du chemin $\gamma-a$ par rapport à 0.*

Démonstration. Si F est une primitive de $1/(z-a)$ le long de γ, alors F est localement la composée de γ par une primitive de $1/(z-a)$, ce qui est la même chose que la composée de $\gamma-a$ par une primitive de $1/z$. Donc F est aussi une primitive de $1/z$ le long de γ. Donc $n_{\gamma-a}(0) = \frac{1}{2i\pi}(F(1)-F(0)) = n_\gamma(a)$. ☐

Lemme 45. *Si γ et $\widetilde{\gamma}$ sont deux chemins continus fermés ne passant pas par z_0 et s'ils sont homotopes comme chemins fermés dans $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ alors $n_\gamma(z_0) = n_{\widetilde{\gamma}}(z_0)$.*

Démonstration. La fonction $z\mapsto 1/(z-z_0)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$. Le résultat est donc une conséquence de la formule de Cauchy. ☐

Théorème 46 (Théorème de Rouché)**.** *Soient γ un chemin fermé et un point z_0 n'appartenant pas à l'image de γ. Si $\widetilde{\gamma}$ est un autre chemin fermé, indexé par le même intervalle que γ et vérifiant $|\gamma(t)-\widetilde{\gamma}(t)| < |\gamma(t)-z_0|$ pour tout t dans cet intervalle. Alors $n_\gamma(z_0) = n_{\widetilde{\gamma}}(z_0)$.*

Il faut voir le théorème de Rouché comme une propriété de continuité : on ne change pas l'indice de γ par rapport à z_0 en faisant une perturbation suffisamment petite du chemin γ.

Démonstration. Supposons pour simplifier que γ et $\widetilde{\gamma}$ sont indexés par $[0,1]$. On définit une homotopie entre les chemins fermés γ et $\widetilde{\gamma}$ en posant $H(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s\widetilde{\gamma}(t)$ pour $s,t \in [0,1]$. L'hypothèse montre que H évite le point z_0 :

$$|H(s,t) - z_0| = |\gamma(t) - z_0 + s(\widetilde{\gamma}(t) - \gamma(t))| \geq |\gamma(t) - z_0| - s|\gamma(t) - \widetilde{\gamma}(t)| > 0.$$

Les chemins γ et $\widetilde{\gamma}$ sont donc homotopes comme chemins fermés dans $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$. Le résultat se déduit donc du lemme précédent. □

Proposition 47. *Soit γ un chemin fermé. La fonction $z \mapsto n_\gamma(z)$ est constante sur chaque composante connexe du complémentaire de l'image de γ et elle est nulle sur la composante connexe non bornée.*

Démonstration. Soit z_0 n'appartenant pas à l'image de γ, alors la distance de z_0 à l'image de γ est strictement positive. On la note ε et on se donne $z \in D(z_0, \varepsilon)$. Alors les chemins γ et $\gamma - z + z_0$ et le point z_0 vérifient les hypothèses du théorème de Rouché. Donc $n_\gamma(z_0) = n_{\gamma - z + z_0}(z_0)$. En utilisant l'invariance par translation on en déduit $n_\gamma(z_0) = n_\gamma(z)$ ce qui montre que l'indice est constant sur le disque $D(z_0, \varepsilon)$. Autrement dit l'indice est constant au voisinage de chaque point du complémentaire de l'image de γ, ce qui par un argument de connexité montre la première partie de la proposition. La deuxième partie se déduit aussi du théorème de Rouché : en appliquant ce dernier au chemin γ et au chemin constant égal à 0, on obtient $n_\gamma(z) = 0$ dès que $|z| > \sup_{t \in [0,1]}\{|\gamma(t)|\}$. En particulier $n_\gamma(z) = 0$ pour $|z|$ suffisamment grand. Comme l'indice est constant sur la composante connexe non bornée ceci implique bien le résultat. □

Exemple. Si γ parcourt un cercle dans le sens trigonométrique, l'indice vaut 1 à l'intérieur du cercle. En effet, d'après la proposition précédente, pour calculer l'indice à l'intérieur il suffit de calculer l'indice au centre, et on trouve 1. À l'extérieur du cercle, qui est la composante non bornée, l'indice vaut 0.

On peut maintenant démontrer une deuxième version de la formule de Cauchy.

Théorème 48 (Formule intégrale de Cauchy)**.** *Soit Ω un domaine, soit γ un chemin fermé contractile dans Ω et soit f une fonction holomorphe sur Ω. Alors pour tout $z_0 \in \Omega$ n'appartenant pas à l'image de γ on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} = n_\gamma(z_0) f(z_0).$$

Démonstration. L'idée est d'appliquer la première formule de Cauchy à la fonction g définie par $g(z) = (f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ pour $z \neq z_0$ et $g(z_0) = f'(z_0)$. Le problème est qu'a priori g n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Admettons qu'on peut quand même lui appliquer la formule de Cauchy. Comme le chemin γ est contractile on obtient $\int_\gamma g = 0$. Mais puisque le point z_0 n'appartient pas à l'image de γ on a

$$\int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0)\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} - (2i\pi) n_\gamma(z_0) f(z_0).$$

On obtient donc le résultat cherché. Montrons maintenant qu'on avait bien le droit d'appliquer la formule de Cauchy à g. Il suffit de montrer qu'une fonction g continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega\backslash\{z_0\}$ vérifie la formule de Cauchy. D'après le point 4 des remarques qui suivent la formule de Cauchy il suffit en fait de montrer qu'elle vérifie la conclusion du théorème de Goursat. On se donne donc un triangle Δ inclus dans Ω. Si le point problématique z_0 n'appartient pas au triangle il n'y a rien à faire : il suffit d'appliquer Goursat dans le domaine $\Omega\backslash\{z_0\}$. Si z_0 appartient à Δ, on appelle Δ_ϵ le triangle obtenu en appliquant une homotétie de centre z_0 et de rapport ε au triangle Δ (faire un dessin). Il est alors clair les chemins faisant les tours de Δ et Δ_ε sont homotopes comme chemins fermés dans $\Omega\backslash\{z_0\}$. Comme $g \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{z_0\})$ la formule de Cauchy donne $\int_{\partial\Delta} g = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} g$. Mais comme le périmètre de Δ_ε est de l'ordre de ε, et comme g est bornée au voisinage de z_0 on en déduit $|\int_{\partial\Delta_\varepsilon} g| = O(\varepsilon)$. En faisant tendre ε vers 0 on obtient $\int_{\partial\Delta} g = 0$ ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. En fait on verra plus tard que si f est holomorphe alors la fonction $(f(z) - f(z_0)/(z - z_0)$ prolongée par continuité en z_0 est bien holomorphe en z_0. Donc la deuxième partie de la démonstration précédente est en quelque sorte inutile, si ce n'est que cette propriété était impossible à démontrer à ce stade.

Dans le cas particulier où le chemin γ parcourt un cercle dans le sens trigonométrique on obtient le résultat suivant.

Corollaire 49 (Formule de Cauchy pour un cercle, formule de la moyenne)**.** *Soit Ω un domaine, soient a et r vérifiant $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ et soit γ le chemin faisant le tour du disque $D(a,r)$ dans le sens trigonométrique. Alors, pour tout $z_0 \in \Omega$ non situé sur le cercle on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} = \begin{cases} f(z_0) & \text{si } z_0 \in D(a,r) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier on a $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{i\theta})\, d\theta$.

La deuxième égalité montre que pour une fonction holomorphe la moyenne de f sur un cercle complètement contenu dans le domaine est égale à la valeur de la fonction au centre du cercle. On appelle cette propriété *formule de la moyenne.*

Démonstration. Il s'agit de montrer qu'on a bien le droit d'appliquer la formule de Cauchy au chemin γ, c'est-à-dire que ce chemin est bien contractile dans Ω. Mais puisque $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ l'homotopie H définie par $H(s,\theta) = a + (1-s)\mathrm{e}^{i\theta}$ contracte bien le chemin γ au point a sans sortir de Ω. $\square$

Les hypothèses de la formule de Cauchy conduisent naturellement à introduire la définition suivante.

Definition 50. On dit qu'un domaine Ω est *simplement connexe* si tout chemin fermé γ à valeurs dans Ω est contractile dans Ω.

Intuitivement un domaine Ω est simplement connexe s'il n'a pas de trous.

Dans un domaine simplement connexe, tout chemin fermé vérifie l'hypothèse de la formule de Cauchy. Autrement dit on a le résultat suivant.

Proposition 51. *Si f est holomorphe sur un domaine simplement connexe Ω alors $\int_\gamma f = 0$ pour tout chemin fermé à valeurs dans Ω. De manière équivalente f admet une primitive globale sur Ω.*

Remarque. Ceci implique en particulier que si Ω est un domaine simplement connexe ne contenant pas 0 alors il existe une primitive de $1/z$ sur Ω et donc une détermination du logarithme.

Donnons maintenant un critère garantissant la simple connexité. Rappelons qu'un domaine Ω est dit étoilé s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ on ait $[z_0, z] \subset \Omega$. On dit alors que Ω est étoilé par rapport à z_0.

Lemme 52. *Si Ω est un domaine étoilé alors il est simplement connexe. En particulier les domaines convexes sont simplement connexes.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0 et soit $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ un chemin fermé. Pour $(s,t) \in [0,1] \times [a,b]$ on pose $H(s,t) = (1-s)z_0 + s\gamma(t)$. Alors H est une homotopie qui contracte le chemin γ en un point et qui ne sort pas de Ω par hypothèse. $\square$

Exemples. $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ n'est pas simplement connexe, puisque le chemin parcourant le cercle unité dans le sens trigonométrique n'est pas contractile dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. En revanche le domaine $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est simplement connexe puisqu'il est étoilé par rapport au point 1.

On peut caractériser la simple connexité de la manière suivante, mais on ne démontrera pas ce théorème ici (on ne l'utilisera pas non plus donc tout va bien).

Théorème 53. *Un domaine Ω est simplement connexe si et seulement si les composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash\Omega$ sont toutes non bornées.*

4 Analycité des fonctions holomorphes. Conséquences

Une des principales conséquences de la formule de Cauchy est le résultat suivant.

Théorème 54. *Soit Ω un domaine. Si f est holomorphe sur Ω, alors elle est analytique sur Ω. De plus pour $z_0 \in \Omega$, les coefficients (a_n) du développement en série entière de f en z_0 sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,, \quad \forall n \geq 0. \tag{2}$$

où γ est le chemin parcourant dans le sens trigonométrique la frontière d'un disque $D(z_0, r)$ vérifiant $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$, cette quantité ne dépendant pas de r. Enfin le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à la distance de z_0 au bord de Ω.

Il faut bien voir que c'est un résultat surprenant a priori, il implique en particulier qu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est automatiquement infiniment dérivable. Le résultat analogue sur $\mathbb{R}$ est par exemple complètement faux.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule intégrale de Cauchy pour un cercle. En effet celle-ci affirme que

$$f(z_1) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_1},$$

pour tout $z_1 \in D(z_0, r)$. Mais si z_1 est à l'intérieur du disque $D(z_0, r)$ et z est sur le cercle, alors $|z_1 - z_0| < |z - z_0|$ et on peut écrire

$$\frac{1}{z - z_1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z_1 - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

On insère ceci dans l'égalité précédente, on utilise Fubini et la définition des a_n :

$$f(z_1) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sum_{n \geq 0} \frac{f(z)(z_1 - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)(z_1 - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} a_n (z_1 - z_0)^n.$$

Pour être complet il faudrait remplacer l'intégrale curviligne par son expression explicite et vérifier qu'on a bien le droit d'appliquer Fubini, mais ceci est laissé en exercice (c'est facile, il suffit d'utiliser le fait que z_1 est à l'intérieur du cercle, tandis que z est sur le cercle). On en déduit que f est développable en série entière en z_0, que les coefficients du développement en série entière sont donnés par (2) et que le développement converge dans le disque $D(z_0, r)$. L'unicité du développement en série entière de f montre a posteriori que la formule pour les (a_n) ne dépend en fait pas de r. On aurait aussi pu montrer ce point en utilisant la formule de Cauchy : deux cercles centrés en z_0 contenus dans Ω sont en effet homotopes dans $\Omega \backslash \{z_0\}$. Le dernier point est clair : le développement en série entière converge dans $D(z_0, r)$ pour tout r tel que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Donc le rayon de convergence est au moins égal à la distance de z_0 au bord de Ω. □

Remarque. Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, le théorème implique que f s'écrit comme une série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ dont le rayon de convergence est infini. Une telle fonction est appelée fonction *entière*. L'exponentielle, le sinus et le cosinus sont des exemples de fonctions entières.

On a donc équivalence entre f holomorphe et f analytique. Comme la dérivée d'une fonction analytique est analytique on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 55. *Si f est holomorphe alors f' est holomorphe.*

On peut aussi en déduire le résultat suivant, qu'on avait annoncé et qu'on réutilisera plus tard.

Corollaire 56. *Soit f holomorphe sur Ω, et soit $z_0 \in \Omega$, alors la fonction g définie par*

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & si\ z \neq z_0 \\ f'(z_0) & si\ z = z_0 \end{cases}$$

est holomorphe sur Ω.

Démonstration. Il est clair que g est holomorphe sur $\Omega \backslash \{z_0\}$, il s'agit donc de montrer qu'elle est aussi dérivable en z_0. Comme f est holomorphe, le Théorème 54 assure qu'elle admet un développement en série entière en z_0 :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

pour tout z suffisamment proche de z_0. En particulier $a_0 = f(z_0)$ et $a_1 = f'(z_0)$. Donc

$$g(z) = \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^{n-1}$$

au voisinage de z_0, ce qui montre que g aussi est développable en série entière en z_0, ce qui implique bien que g est dérivable en z_0. □

On a vu que pour $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, les coefficients (a_n) du développement en série de f en z_0 sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

où γ le bord d'un disque centré en z_0 contenu dans Ω. Ceci implique immédiatement le résultat suivant.

Lemme 57 (Inégalités de Cauchy)**.** *Pour tout r vérifiant $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, les coefficients du développement en série entière de f en z_0 vérifient*

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{|z-z_0|=r}\{|f(z)|\}}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particulier dans le cas $n = 1$ on obtient

$$|f'(z_0)| = |a_1| \leq \frac{\sup_{|z-z_0|=r}\{|f(z)|\}}{r}.$$

Corollaire 58 (Théorème de Liouville)**.** *Si f est une fonction entière bornée alors f est constante.*

Encore une fois c'est un phénomène qui est spécifique à l'analyse complexe. Une fonction peut très bien être dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$ sans être constante, par exemple les fonctions sinus et cosinus. Remarquer au passage que les fonctions sinus et cosinus ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Rappelons qu'une fonction entière est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui admet donc un développement en série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence infini. D'après les inégalités de Cauchy et l'hypothèse on a

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{|z|=r}\{|f(z)|\}}{r^n} \leq \frac{\sup_{\mathbb{C}}\{|f|\}}{r^n},$$

pour tout $r > 0$ et pour tout entier n. En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, ce qui montre que $f(z) = a_0$ pour tout z. □

Exemple. On déduit facilement de Liouville que si une fonction entière n'est pas constante alors elle est d'image dense. En effet raisonnons par contraposée et supposons que f est entière et évite un disque $D(a, \epsilon)$. Alors $1/(f - a)$ est une fonction entière bornée, donc constante par Liouville, ce qui montre que f elle-même est constante. En fait on peut dire beaucoup mieux : l'image d'une fonction entière non constante évite au plus un seul point de $\mathbb{C}$, c'est ce qu'on appelle le petit théorème de Picard, qui ne sera pas démontré dans ces notes.

L'application la plus classique de Liouville est la suivante.

Exemple (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** Le théorème de d'Alembert-Gauss (parfois appelé théorème fondamental de l'algèbre) affirme que tout polynôme à coefficients complexes est scindé sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme un produit $P(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - z_i)$. Ceci se déduit très facilement du théorème de Liouville. On observe d'abord qu'il suffit de montrer que si P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 alors il admet au moins une racine complexe z_1. En effet on peut alors factoriser $P(z)$ par $z - z_1$ et appliquer récursivement la propriété au polynôme quotient. Raisonnons pas l'absurde et supposons que P est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 sans racine. Alors $1/P$ est une fonction entière, et elle tend vers 0 en l'infini puisque $|P|$ tend vers $+\infty$. Donc $1/P$ est une fonction entière bornée. Elle est donc constante par Liouville, ce qui est absurde.

Théorème 59 (Principe du maximum)**.** *Soit f holomorphe sur un domaine Ω. Si $|f|$ admet un maximum local alors f est constante.*

Remarque. Encore une fois ce phénomène est très spécifique à l'analyse complexe, l'analogue réel est complètement faux.

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ tel que $|f|$ admette un maximum local en a. Quitte à multiplier f par $\overline{f(a)}$ on peut supposer que $f(a)$ est un réel positif. Rappelons que f vérifie la formule de la moyenne

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, dr$$

dès que le disque $\overline{D}(a,r)$ est inclus dans Ω. On prend la partie réelle de cette égalité. Si r est suffisamment petit, on obtient alors en utilisant le fait que f admet un maximum local en a

$$\begin{aligned} f(a) = \Re(f(a)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re f(a + re^{i\theta})\, d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|\, d\theta \leq |f(a)| = f(a). \end{aligned}$$

Donc toutes les inégalités sont des égalités. Donc pour presque tout $\theta \in [0, 2\pi]$ on a $\Re f(a + re^{i\theta}) = |f(a)| = f(a)$, ce qui implique $f(a + re^{i\theta}) = f(a)$. En particulier l'ensemble des z tels que $f(z) = f(a)$ possède un point d'accumulation. D'après le principe du prolongement analytique on en déduit $f(z) = f(a)$ pour tout $z \in \Omega$. □

Le principe du maximum est utilisé le plus souvent de la manière suivante.

Corollaire 60. *Soit Ω un domaine. Soit f holomorphe sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$ et telle que $|f|$ atteigne son maximum sur $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\max_{\overline{\Omega}}\{|f|\} = \max_{\partial\Omega}\{|f|\}.$$

Démonstration. Soit z_0 un point de $\overline{\Omega}$ où $|f|$ atteint son maximum. Si $z_0 \in \partial\Omega$ il n'y a rien à démontrer. Si $z_0 \in \Omega$, alors $|f|$ admet un maximum local sur Ω. D'après le principe du maximum f est constante sur Ω. Mais comme f est continue sur $\overline{\Omega}$ elle est alors constante sur $\overline{\Omega}$, ce qui implique le résultat trivialement. □

Le résultat qui suit est la réciproque du théorème de Goursat, qu'on utilisera beaucoup par la suite.

Corollaire 61 (Théorème de Morera)**.** *Si f est continue sur un domaine Ω et vérifie $\int_{\partial\Delta} f = 0$ pour tout triangle Δ contenu dans Ω, alors f est holomorphe.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Il s'agit de montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Le lemme qui suit le théorème de Goursat montre que sous ces hypothèses f admet des primitives locales. En particulier elle admet une primitive F au voisinage de z_0. Mais comme la dérivée d'une fonction holomorphe est encore holomorphe $F' = f$ est holomorphe au voisinage de z_0. En particulier f est dérivable en z_0. □

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de Morera.

Théorème 62. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω telle que $f_n \to f$ uniformément sur tout compact de Ω. Alors f est holomorphe.*

Démonstration. D'après le théorème de Morera, il suffit de montrer que f est continue sur Ω et que $\int_{\partial\Delta} f = 0$ pour tout triangle Δ inclus dans Ω. La fonction f est continue comme limite uniforme de fonctions continues. De plus, comme $f_n \to f$ uniformément sur Δ, on a $\int_{\partial\Delta} f_n \to \int_{\partial\Delta} f$. Mais d'après le théorème de Goursat $\int_{\partial\Delta} f_n = 0$ pour tout n. Donc $\int_{\Delta} f = 0$. □

Remarque. Une fois de plus on peut noter que ce résultat est surprenant a priori, l'analogue réel par exemple est complètement faux. Sur un intervalle de $\mathbb{R}$, une suite de fonctions dérivables, ou même $\mathcal{C}^1$, ou même $\mathcal{C}^\infty$, peut très bien converger uniformément vers une fonction non dérivable. Par exemple l'ensemble des polynômes est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ pour la norme uniforme.

On peut aussi formuler un résultat analogue pour les séries de fonctions.

Théorème 63. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes telle que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω. Alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est holomorphe.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème précédent puisque dans ces conditions la suite des sommes partielles $\sum_{n=1}^N f_n$ est holomorphe et converge uniformément sur tout compact. $\square$

Ce résultat s'étend aux intégrales dépendant d'un paramètre de manière holomorphe.

Théorème 64. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et soit $f\colon \Omega\times E\to\mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose que*

1. *$z\mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Ω pour tout x de E ;*
2. *Pour tout compact K de Ω il existe $g\colon E\to\mathbb{R}_+$ intégrable telle que $|f(z,x)|\leq g(x)$ pour tout $z\in K$ et $x\in E$.*

Alors $z\mapsto \int_E f(z,x)\,\mu(dx)$ est un holomorphe sur Ω.

Démonstration. On pose $F(z)=\int_E f(z,x)\,\mu(dx)$. Le théorème de continuité sous le signe intégrale montre que f est continue. Soit Δ un triangle inclus dans Ω. Sous réserve que Fubini s'applique et en appliquant Goursat à $z\mapsto f(z,x)$, on obtient

$$\int_{\partial\Delta} F(z) = \int_{\partial\Delta}\left(\int_E f(z,x)\,dx\right) = \int_E\left(\int_{\partial\Delta} f(z,x)\right)\,dx = 0.$$

Pour vérifier que Fubini s'applique, on peut par exemple décomposer le triangle en trois segments orientés. Il suffit alors de montrer que pour tout segment $[a,b]\subset\Omega$ on a

$$\int_E\int_0^1 |f((1-t)a+tb,x)||b-a|\,\mu(dx)dt<+\infty.$$

L'hypothèse faite sur f implique l'existence de $g\colon E\to\mathbb{R}_+$ intégrable telle que $|f((1-t)a+tb,x)|\leq g(x)$ pour tout $t\in[0,1]$ et pour tout $x\in E$, ce qui implique clairement le résultat cherché. $\square$

Des exemples d'application de ces théorèmes de convergence sont donnés en TD. On utilisera aussi ces théorèmes dans les sections suivantes.

5 Singularités des fonction holomorphes, formule des résidus

Definition 65. Une série de Laurent est une série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes indexée par $\mathbb{Z}$.

Lemme 66. *Si la série de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ converge dans la couronne $\{r < |z| < R\}$, alors elle converge en fait absolument et la fonction f est holomorphe dans cette couronne. La dérivée est donnée par $f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}$, on peut donc dériver terme à terme une série de Laurent convergente.*

Démonstration. On pose $a(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $b(z) = \sum_{n\geq 1} a_{-n} z^n$ de sorte que $f(z) = a(z) + b(1/z)$. Si f converge dans la couronne $\{r < |z| < R\}$ alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge dans le disque $D(0,R)$, donc son rayon de convergence est supérieur ou égal à R. Elle converge donc absolument dans le disque ouvert et la somme de la série est holomorphe. Le même raisonnement montre que la série b converge absolument et est holomorphe sur $D(0,1/r)$. Ceci implique que f converge absolument dans la couronne et qu'elle est holomorphe comme somme et composée de fonctions holomorphes. Pour calculer la la dérivée on écrit $f'(z) = a'(z) - \frac{1}{z^2} b'(\frac{1}{z})$, et on utilise le fait qu'on peut dériver terme à terme des série entières convergentes. $\square$

Un des objectifs de cette section sera de montrer que réciproquement si f est holomorphe dans une couronne alors elle admet un développement en série de Laurent. Commençons par montrer que s'il existe, le développement est unique.

Lemme 67. *Si deux séries de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$ convergent dans une couronne $\{r < |z| < R\}$ et si les sommes des deux séries sont égales dans la couronne alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. En faisant la différence des deux séries, on voit qu'il suffit de montrer que si $\sum a_n z^n = 0$ dans la couronne alors $a_n = 0$ pour tout n. On se donne alors un chemin γ parcourant le cercle de centre 0 et de rayon ρ dans le sens trigonométrique, le rayon ρ étant choisi tel que $r < \rho < R$. Rappelons que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma z^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = -1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant Fubini on en déduit donc

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma z^n \right) = a_{-1}.$$

Le fait que Fubini s'applique bien se déduit facilement de la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| \rho^n$. On a donc montré que si $\sum a_n z^n = 0$ dans la couronne alors $a_{-1} = 0$. Mais en appliquant ce résultat à la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n-k} z^n = z^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ qui est également nulle dans la couronne on obtient $a_{-k-1} = 0$ pour tout entier relatif k, ce qui est le résultat cherché. $\square$

Théorème 68. *Soit $\Omega = \{r < |z| < R\}$ une couronne et soit f holomorphe sur Ω. Alors il existe une unique série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ absolument convergente sur Ω et telle que*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n, \quad \forall z \in \Omega.$$

De plus les (a_n) sont donnés par la formule

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

où γ parcourt un cercle de centre 0 et de rayon $\rho \in]r, R[$ parcouru dans le sens trigonométrique, cette quantité ne dépendant pas de ρ.

Démonstration. La démonstration ressemble beaucoup à la preuve du fait que les fonctions holomorphes sont analytiques. On définit a_n par la formule (3). Commençons par montrer que cette définition ne dépend pas de ρ. Si γ_1 et γ_2 parcourent chacun un cercle centré en 0 et de rayon strictement compris entre r et R dans le sens trigonométrique alors γ_1 et γ_2 sont homotopes comme chemins fermés dans la couronne. En effet l'homotopie $H(s,t) = (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t)$ déforme γ_1 en γ_2 sans sortir de la couronne (faire un dessin). Comme la fonction $f(z)/z^{n+1}$ est holomorphe dans la couronne, la formule de Cauchy donne bien

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}}.$$

Montrons maintenant que la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ converge dans la couronne. Par définition de a_n on a

$$|a_n| \leq \frac{\max_{|z|=\rho}\{|f(z)|\}}{\rho^n} = O(\rho^{-n}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon supérieur ou égal à ρ, donc supérieur ou égal à R en faisant tendre ρ vers R. De même en faisant tendre ρ vers r on voit que $\sum_{n\geq 1} a_{-n} z^n$ a un rayon supérieur ou égal à $1/r$. On en déduit bien que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\rho^n$ converge pour tout $\rho \in]r, R[$. Montrons enfin que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = f(z)$ pour tout z dans la couronne. Pour ce faire on fixe z_0, ρ_1 et ρ_2 de sorte que

$$r < \rho_1 < |z_0| < \rho_2 < R.$$

et on introduit les chemins γ_1 et γ_2 parcourant les cercles centrés en 0 et de rayons respectifs ρ_1 et ρ_2 dans le sens trigonométrique (faire un dessin). On applique la formule de Cauchy à la fonction $g(z) = (f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ prolongée par continuité en z, dont on sait qu'elle est holomorphe sur Ω. On obtient $\int_{\gamma_1} g = \int_{\gamma_2} g$. Comme le point z_0 n'appartient ni à l'image de γ_1 ni à celle de γ_2, cette égalité se réécrit

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} - n_{\gamma_1}(z_0)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0} - n_{\gamma_2}(z_0)f(z_0).$$

Mais le point z_0 est situé à l'intérieur du cercle γ_2 et à l'extérieur du cercle γ_1. On obtient donc

$$\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0} - \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\right) = f(z_0). \tag{4}$$

Pour z appartenant à l'image de γ_2 on a $|z_0| < |z|$ et donc

$$\frac{1}{z-z_0} = \sum_{n\geq 1} \frac{z_0^n}{z^{n+1}}.$$

Puis par Fubini et par définition des a_n

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\right) z_0^n = \sum_{n\geq 0} a_n z_0^n.$$

De même si z appartient à l'image de γ_1 on a $1/(z-z_0) = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{z_0^{n+1}}$ et donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-z_0} = -\sum_{n\geq 0}\left(\int_{\gamma_1} f(z)\, z^n\right) z_0^{-n-1} = -\sum_{n\geq 0} a_{-n-1} z_0^{-n-1}$$

En injectant les deux dernières égalités dans (4) on obtient le résultat cherché. □

La formule pour les coefficients du développement en série de Laurent donne en particulier le résultat suivant.

Lemme 69 (Inégalités de Cauchy). *Soit f holomorphe sur $\{r < |z| < R\}$. Pour tout ρ strictement compris entre r et R la suite (a_n) des coefficients du développement de f en série de Laurent vérifie*

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{|z|=\rho}\{|f(z)|\}}{\rho^n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On va maintenant appliquer ces résultats dans le cas particulier où $r = 0$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit f holomorphe sur un voisinage épointé de z_0, c'est-à-dire un ensemble de la forme $D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ pour un certain $R > 0$. On dit alors que f possède une *singularité* en z_0. En appliquant le théorème précédent à la fonction $z \mapsto f(z-z_0)$ et à la couronne $\{0 < |z| < R\}$ on voit qu'il existe une unique série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ qui converge dans la couronne $\{0 < |z| < R\}$ et telle qu'on ait

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, R)\backslash\{z_0\}.$$

Definition 70. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ est appelée développement en série de Laurent de f en z_0. La série $\sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ est alors appelée *partie principale* de f en z_0, tandis que la série $\sum_{n\leq -1} a_n(z - z_0)^n$ est appelée *partie singulière* de f en z_0.

Lemme 71. *Soit f holomorphe dans un voisinage épointé de z_0. La partie singulière de f en z_0 est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.*

Démonstration. Par hypothèse il existe $R > 0$ tel que f soit holomorphe sur $D(z_0, R)\backslash\{z_0\}$, c'est-à-dire sur la couronne $\{0 < |z - z_0| < R\}$. Le Théorème 68 montre que le développement en série de Laurent de f

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

converge sur pour tout z vérifiant $0 < |z - z_0| < R$. En particulier la série $\sum_{n\leq -1} a_n z^n$ converge pour tout z vérifiant $0 < |z| < R$, ce qui montre que la série entière $b(z) = \sum_{n\geq 1} a_{-n} z^n$ a un rayon de convergence infini. Elle définit donc une fonction entière. Notons aussi que $b(0) = 0$. Par composition, on en déduit que la partie singulière de f, qui est la fonction $h(z) = b(\frac{1}{z-z_0})$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ et tend vers 0 en $+\infty$. $\square$

Definition 72. Soit f holomorphe dans un voisinage épointé de z_0 et soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ son développement en série de Laurent en z_0.

(i) Si $a_n = 0$ pour tout $n \leq -1$, alors f se prolonge de manière holomorphe en z_0. On dit que la singularité en z_0 est effaçable ;

(ii) Si $\{n \leq -1 \colon a_n \neq 0\}$ est non vide mais fini, on dit que f possède un pôle en z_0. L'ordre de ce pôle est alors défini comme $\max\{n \geq 1 \colon a_{-n} \neq 0\}$;

(iii) Si $\{n \leq -1 \colon a_n \neq 0\}$ est infini on dit que f possède une singularité essentielle en z_0.

Autrement dit, la singularité est effaçable si la partie singulière de f est nulle et c'est un pôle si la partie singulière de f est une fraction rationnelle.

Exemple. La fonction $\exp(1/z)$ possède une singularité essentielle en 0.

Théorème 73. *Soit f holomorphe dans un voisinage épointé de z_0. Alors*

(i) Si $f(z) = O(1)$ au voisinage de z_0 la singularité en z_0 est effaçable ;

(ii) Si $f(z) = O(|z - z_0|^{-n})$ au voisinage de z_0 alors f possède un pôle d'ordre au plus n.

(iii) f possède un pôle d'ordre n en z_0 si et seulement s'il existe $a \neq 0$ tel que $f(z) \sim_{z\to z_0} a(z - z_0)^{-n}$.

Démonstration. On peut supposer $z_0 = 0$. Soit (a_n) la suite des coefficients du développement de f en série de Laurent en 0. D'après les inégalités de Cauchy on a

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{|z|=\rho}\{|f(z)|\}}{\rho^n},$$

pour tout entier naturel n et pour ρ suffisamment petit. Si f est bornée au voisinage de 0, on fait tendre ρ vers 0, et on obtient $a_n = 0$ pour tout $n < 0$. Autrement la partie singulière de f est nulle, ce qui prouve (i). Le point (ii) se démontre de manière analogue. Montrons (iii). Si f possède un pôle d'ordre n en z_0 alors

$$f(z) = \sum_{k\geq -n} a_k (z - z_0)^k = \frac{a_n}{(z - z_0)^n} + O\left(\frac{1}{|z - z_0|^{n-1}}\right), \tag{5}$$

avec $a_n \neq 0$, ce qui montre l'implication directe. Réciproquement si $f(z) \sim a(z - z_0)^{-n}$ alors en particulier $f(z) = O(|z - z_0|^{-n})$ donc f possède un pôle d'ordre au plus n d'après (ii). On peut alors écrire (5), et on en déduit $a_n = a \neq 0$, ce qui montre que le pôle de f est exactement d'ordre n. $\square$

Remarque. On a vu en TD que si f est holomorphe dans un voisinage épointé de z_0 et continue en z_0 alors elle est en fait holomorphe au voisinage de z_0. Ici on prouve un résultat plus fort : si f est seulement bornée au voisinage de z_0 alors elle se prolonge de manière holomorphe en z_0. On aurait même pu montrer un résultat encore plus fort, la conclusion est la même si $|f(z)| = o(|z - z_0|^{-1})$ au voisinage de z_0.

On en déduit aussi le résultat suivant.

Corollaire 74. *La partie singulière de f en z_0 l'unique fonction h vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *$f - h$ est bornée au voisinage de z_0 ;*

(ii) *h est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$;*

(iii) *$h(z)$ tend vers 0 en l'infini.*

Démonstration. Soit h la partie singulière de f. Il est clair que h vérifie (i) puisque $f - h$, qui est la partie principale de f, est holomorphe au voisinage de z_0. Le fait que h vérifie (ii) et (iii) a déjà été vu (Lemme 71). Soit h_1 est une autre fonction vérifiant ces propriétés, montrons que $h = h_1$. Posons $\ell = h - h_1$, alors ℓ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ et bornée au voisinage de z_0. D'après ce qui précède elle se prolonge donc en une fonction holomorphe en z_0. Donc ℓ est une fonction entière, et d'après la propriété (iii) elle tend vers 0 en l'infini. Donc ℓ est la fonction nulle par Liouville. □

Exemple. Déterminons la partie singulière de $\text{cotan}(z)$ en 0. On écrit

$$\text{cotan}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{1 + O(z)}{z + O(z^2)} = \frac{1}{z}(1 + O(z)) = \frac{1}{z} + O(1).$$

Donc la partie singulière de $\text{cotan}(z)$ en 0 est $1/z$. En particulier 0 est un pôle d'ordre 1.

Definition 75. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. On dit que f est méromorphe sur Ω s'il existe un sous ensemble P de Ω sans point d'accumulation dans Ω tel que f soit holomorphe sur $\Omega\backslash P$ et tel que pour tout $p \in P$, la fonction f admette un pôle en p. L'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω est noté $\mathcal{M}(\Omega)$.

Exemples. La fonction $\exp(1/z)$ n'est pas méromorphe sur $\mathbb{C}$ puisqu'elle admet une singularité essentielle en 0. La fonction $1/\sin(\pi z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$. En effet elle est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{Z}$ est sans point d'accumulation, et $1/\sin(\pi z)$ admet un pôle simple en k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 76. *Si f et g sont méromorphes sur un même domaine Ω alors $f + g$ et fg sont méromorphes sur Ω. Si de plus g n'est pas identiquement nulle $1/g$ est méromorphe. L'ensemble des fonction méromorphes sur Ω forme donc un corps.*

Remarque. Attention la composée de deux fonctions méromorphes n'est pas forcément méromorphe, par exemple $\exp(1/z)$ n'est pas méromorphe.

Démonstration. On montre seulement la dernière partie, les autres se démontrent de manière analogue. D'après le principe du prolongement analytique si g n'est pas identiquement nulle l'ensemble des zéros de g est sans point d'accumulation. Donc l'union P des zéros de g et des pôles de g est sans point d'accumulation, et $1/g$ est holomorphe sur $\Omega\backslash P$. Si g possède un pôle en z_0 alors $1/g \to 0$ en z_0 donc la singularité de $1/g$ en z_0 est effaçable. Si g possède un zéro en z_0, comme g n'est pas identiquement nulle, ce zéro possède un ordre fini n, et il existe donc une constante $a \neq 0$ telle que $g(z) \sim a(z - z_0)^n$ pour $z \to z_0$. Donc $1/g(z) \sim a^{-1}(z - z_0)^{-n}$ ce qui montre que $1/g$ possède un pôle d'ordre n en z_0. □

Étant donnée une fonction méromorphe f sur un domaine, elle a au plus un nombre dénombrable de pôles et on peut être tenté d'essayer d'effacer toutes les singularités de f en considérant la fonction

$$f - \sum_p s_p,$$

où la somme est prise sur tous les pôles p de f et s_p désigne la partie singulière en p. Le problème est qu'en général la série $\sum_p s_p$ n'a aucune raison d'être convergente. On peut montrer qu'il est possible d'ajouter une fonction entière à chaque s_p qui rende la somme convergente (Théorème de Mittag-Leffler). On ne va pas le faire ici et on va se contenter d'étudier un cas particulier.

Théorème 77. *Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ on a*

$$\pi\text{cotan}(\pi z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n}.$$

Remarque. Cette identité est parfois écrite de la manière suivante

$$\pi\text{cotan}(\pi z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n},$$

ce qui est plus joli mais moins rigoureux, la série de droite n'étant pas absolument convergente.

Démonstration. Appelons $f(z)$ le membre de gauche $g(z)$ le membre de droite. La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ comme quotient de deux fonctions entières, ses pôles sont les zéros de $\sin(\pi z)$, c'est-à-dire les entiers relatifs. Et un simple développement limité montre que

$$\pi\text{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z-n} + O(1)$$

quand $z \to n$. Donc la partie singulière de f en n est $1/(z-n)$. On s'intéresse maintenant à g. Commençons par justifier g est bien définie. Si on regroupe les termes n et $-n$ ensemble on obtient

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Le membre de droite est la somme partielle d'une série absolument convergente (du moins pour $z \notin \mathbb{Z}$) donc convergente. Donc le membre de gauche converge aussi. En résumé

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z-n}.$$

On fixe $R > 0$. Pour $z \in D(0,R)$ et $n \geq 2R$, on a

$$\left| \frac{2z}{z^2-n^2} \right| \leq \frac{C}{n^2}$$

pour une certaine constante C. Donc la série $\sum_{n\geq 2R} 2z/(z^2-n^2)$ est normalement convergente sur $D(0,R)$. Comme chacun des termes est holomorphe sur ce disque, la somme de la série l'est aussi (Théorème 63). Donc si on lui rajoute la fraction rationnelle

$$\frac{1}{z} + \sum_{n<2R} \frac{2z}{z^2-n^2} = \sum_{-2R<n<2R} \frac{1}{z-n},$$

on obtient une fonction méromorphe sur le disque, avec un pôle en chacun des entiers du disque. De plus la partie singulière correspondante est $1/(z-n)$, en particulier le pôle est simple. Comme ceci est valable pour tout R on en déduit que g est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en chaque $n \in \mathbb{Z}$ et partie singulière correspondante $1/(z-n)$. Donc f et g sont méromorphes sur $\mathbb{C}$ avec les mêmes pôles et la même partie singulière en chaque pôle. On en déduit que la fonction $f-g$ se prolonge en une fonction entière. En effet, a priori $f-g$ est seulement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle en chacun des entiers relatifs. Mais pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $f-g$ est bornée au voisinage de n (puisque les parties singulières de f et g se compensent) donc la singularité de $f-g$ en n est effaçable. Il suffit maintenant de montrer que $f-g$ est bornée pour conclure. En effet si $f-g$ est bornée alors elle est constante par Liouville. Et comme par ailleurs $f-g$ est clairement impaire, cette constante est forcément nulle. Remarquons maintenant que f et g sont 1-périodiques : $f(z+1) = f(z)$ pour tout z et de même pour g. Donc $f-g$ est aussi 1-périodique. Donc il suffit de montrer que $f-g$ est bornée dans la bande $\{0 \leq \Re(z) \leq 1\}$. De plus $f-g$ étant continue elle est bornée sur les compacts, donc on peut se restreindre à l'ensemble $\{0 \leq \Re(z) \leq 1,\ |\Im(z)| \geq 1\}$. En fait f et g sont toutes les deux bornées sur cet ensemble, donc $f-g$ aussi. Pour f c'est facile à voir : on a en effet

$$|\operatorname{cotan}(x+iy)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{ix-y}+\mathrm{e}^{-ix+y}}{\mathrm{e}^{ix-y}-\mathrm{e}^{-ix+y}}\right| \leq \frac{1+\mathrm{e}^{-2|y|}}{1-\mathrm{e}^{-2|y|}} \leq 4, \quad \text{si } |y|>1.$$

Pour g, il faut batailler un peu plus, mais une comparaison série/intégrale montre que pour $x \in [0,1]$ et $|y|>1$

$$|g(x+iy)| \leq \frac{1}{|y|} + \sum_{n\geq 1} \frac{4|y|}{\sqrt{y^4+n^4}} \leq 1 + 4\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt.$$

D'où le résultat. □

On en arrive maintenant au résultat principal de cette section, *la formule des résidus*. Rappelons d'abord que la fonction z^k admet une primitive globale sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, pour tout entier relatif k, à l'exception de $k=-1$. Ce phénomène explique que le coefficient de $(z-z_0)^{-1}$ du développement en série de Laurent en z_0 d'une fonction joue un rôle particulier. Commençons par lui donner un nom.

Definition 78. Soit f holomorphe dans un voisinage épointé de z_0 et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite des coefficients de son développement en série de Laurent en z_0. Le coefficient a_{-1}, noté $\mathrm{Res}_f(z_0)$, est appelé *résidu* de f en z_0.

Théorème 79 (Formule des résidus)**.** *Soit Ω un domaine et soit γ un chemin fermé contractile dans Ω. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ n'ayant pas de pôle sur γ on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_p n_\gamma(p)\mathrm{Res}_f(p), \tag{6}$$

la somme étant prise sur l'ensemble des pôles de f.

Remarque. La fonction f peut très bien posséder une infinité de pôles mais la démonstration qui suit va montrer qu'il ne peut y en avoir qu'un nombre fini qui soient d'indice non nul par rapport à γ. La somme du membre de droite est donc une somme finie.

Démonstration. Soit H une homotopie à valeurs dans Ω qui contracte γ en un point et soit K l'image de H. On note P l'ensemble des pôles de f, on pose $P_1 = P\cap K$ et $P_2 = P\backslash K$. Comme P est sans point d'accumulation et K est compact, l'ensemble P_1 est fini. Pour $p \in P_1$ on note s_p la partie singulière en de f en p. On pose ensuite $g = f - \sum_{p\in P_1} s_p$. Alors g se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash P_2$. En effet, a priori g est seulement holomorphe sur $\Omega\backslash P$, mais par définition de s_p, la singularité de g en p est effaçable pour tout $p\in P_1$. De plus par construction le chemin γ est toujours contractile dans $\Omega\backslash P_2$. D'après la formule de Cauchy on en déduit $\int_\gamma g = 0$. Comme aucun des pôles de f n'est situé sur γ cette égalité revient à

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{p\in P_1}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma s_p.$$

Comme la fonction f est supposée méromorphe, pour tout p la singularité de f en p est un pôle, donc la partie singulière s_p est une fraction rationnelle : $s_p(z) = \sum_{k=-n}^{-1} a_k(z-p)^k$, en notant n l'ordre du pôle. On écrit alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma s_p = \sum_{k=-n}^{-1} a_k\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z-p)^k\right).$$

Mais comme pour $k\neq -1$, la fonction $(z-p)^k$ possède une primitive globale sur $\mathbb{C}\backslash\{p\}$ son intégrale le long de γ est nulle. Pour $k=-1$ cette intégrale vaut $2i\pi n_\gamma(p)$ par définition. On en déduit donc $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma s_p = n_\gamma(p)\mathrm{Res}_\gamma(p)$ pour tout pôle p de f puis

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f = \sum_{p\in P_1} n_\gamma(p)\mathrm{Res}_\gamma(p).$$

C'est le résultat cherché. En effet, comme γ est homotope à un point dans $\Omega\backslash P_2$, les éléments de P_2 sont d'indice nul et ne contribuent donc pas au membre de droite dans (6). □

Remarque. En fait le résultat reste vrai même si les singularités de f sont essentielles. On peut en effet montrer que l'égalité $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma s_p = n_\gamma(p)\mathrm{Res}_\gamma(p)$ reste vraie même si la singularité de f en p est essentielle.

La formule des résidus est un outil très puissant pour calculer des intégrales, donnons tout de suite un exemple.

Proposition 80. *Soit R une fraction rationnelle intégrable sur $\mathbb{R}$. En particulier R ne possède pas de pôle sur la droite réelle. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} R(x)\,dx = \sum_{p\in\mathcal{P}_+} \mathrm{Res}_R(p),$$

où $\mathcal{P}_+$ désigne l'ensemble des pôles de R de partie imaginaire strictement positive.

Démonstration. On écrit $R = P/Q$ où P et Q sont deux polynômes. Les pôles de R sont des racines de Q et sont donc en nombre fini. On choisit r suffisamment grand pour que ces racines soient toutes de module strictement plus petit que r et on applique la formule des résidus au chemin γ faisant le tour du demi-disque centré en 0 de rayon r situé dans le demi plan supérieur (faire un dessin). Comme les racines de Q de partie imaginaire positive sont d'indice 1 par rapport à γ et celles de partie imaginaire négative sont d'indice nul on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma R = \sum_{p\in\mathcal{P}_+} \mathrm{Res}_R(p). \tag{7}$$

Par ailleurs, comme R est supposée intégrable sur $\mathbb{R}$ on a forcément $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. Donc $|R(z)| = O(|z|^{-2})$ quand $|z| \to +\infty$. Donc

$$\int_\gamma R = \int_{-r}^{r} R(x)\,dx + ir\int_0^\pi R(re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta = \int_{-r}^{r} R(x)\,dx + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

En reportant dans (7) et en faisant tendre r vers l'infini on obtient le résultat. □

Exemple. Si $R(x) = 1/(1+x^2) = 1/(x+i)(x-i)$ alors le seul pôle de partie imaginaire positive est $+i$ et le résidu correspondant est $1/(2i)$. On en déduit donc $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

Évidemment la formule des résidus n'est utile que si on sait calculer les résidus d'une fonction méromorphe donnée. En pratique cela se ramène à un calcul de développement limité.

Lemme 81 (Résidus d'une dérivée logarithmique)**.** *Soit f holomorphe sur un domaine Ω, non identiquement nulle, et soit z_0 un zéro de f. Alors la singularité de f'/f en z_0 est un pôle d'ordre 1, le résidu de f'/f en z_0 est un entier naturel égal à l'ordre du zéro de f en z_0.*

Démonstration. Soit (a_n) les coefficients du développment en série entière de f en z_0 et soit n_0 l'ordre du zéro de f en z_0. On sait donc que $a_n = 0$ si $n < n_0$ et $a_{n_0} \neq 0$. On a alors

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n = a_{n_0}(z-z_0)^{n_0}\left(1 + O(|z-z_0|)\right).$$

De plus

$$f'(z) = \sum_{n\geq 0} na_n(z-z_0)^{n-1} = n_0 a_{n_0}(z-z_0)^{n_0-1}\left(1 + O(|z-z_0|)\right).$$

Par conséquent

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_0(z-z_0)^{n_0-1}\left(1+O(|z-z_0|)\right)}{(z-z_0)^{n_0}\left(1+O(|z-z_0|)\right)} = \frac{n_0}{z-z_0} + O(1),$$

ce qui montre que z_0 est un pôle d'ordre 1 de f'/f et que le résidu vaut n_0. □

On peut alors obtenir des informations sur les zéros d'une fonction holomorphe en appliquant la formule des résidus à sa dérivée logarithmique.

Proposition 82. *Soit f holomorphe dans un voisinage d'un disque fermé $\overline{D}$ et soit γ le chemin parcourant la frontière de D dans le sens trigonométrique. On suppose aussi que f ne s'annule pas au bord de D, de sorte que le chemin $f\circ\gamma$ ne passe pas par 0. Alors l'indice du chemin $f\circ\gamma$ par rapport à 0 est égal au nombre de zéros de f à l'intérieur de D comptés avec multiplicité.*

Démonstration. Supposons par exemple que γ est indexé par $[0,1]$. Alors

$$n_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z} = \frac{1}{2i\pi}(F(1)-F(0)),$$

où F est une primitive de $1/z$ le long de $f\circ\gamma$. Localement F est la composée de $f\circ\gamma$ par une d'une primitive de $1/z$, ce qui est la même chose que la composée de γ par une primitive de f'/f. Par conséquent F est aussi une primitive de f'/f le long de γ. On en déduit donc

$$n_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{f'}{f}.$$

D'après la formule des résidus le membre de droite est la somme des résidus de f'/f à l'intérieur du cercle γ. Mais d'après le lemme précédent ceci revient à faire la somme des ordres des zéros de f à l'intérieur du cercle, autrement dit à compter les zéros de f avec multiplicité. □

Remarque. Le fait que γ soit un cercle ne joue pas de rôle particulier, on aurait le même résultat pour tout chemin fermé qui découpe le plan en deux régions : une composante bornée d'indice 1, et une composante non bornée d'indice 0 (on parle de chemin fermé simple) et toute fonction holomorphe au voisinage de la réunion de composante bornée et de l'image du chemin.

Ce dernier résultat implique que le nombre de zéros d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un cercle admet la propriété de stabilité suivante.

Corollaire 83 (Théorème de Rouché II)**.** *Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque fermé $\overline{D}$ et ne s'annulant pas à la frontière de D. Soit g une autre fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D}$ et vérifiant $|g(z)-f(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z\in\partial D$. Alors f et g ont le même nombre de zéros dans D, ces zéros étant comptés avec multiplicité.*

Démonstration. Soit γ le chemin faisant le tour de D dans le sens trigonométrique. Les hypothèses montrent que les chemins $f\circ\gamma$ et $g\circ\gamma$ et le point 0 vérifient les hypothèses du théorème de Rouché (Théorème 46). On obtient donc $n_{f\circ\gamma}(0) = n_{g\circ\gamma}(0)$, ce qui donne le résultat cherché d'après la proposition précédente. □

Exemple (Une autre démonstration de d'Alembert Gauss)**.** Il s'agit de montrer qu'un polynôme P de degré n possède n racines. On écrit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, avec $a_n \neq 0$. Alors $P(z)\sim a_n z^n$ quand z tend vers l'infini. En particulier si R est assez grand on a $|P(z)-a_n z^n| < |a_n z^n|$ pour tout z de module R. D'après le corollaire précédent on en déduit que P et la fonction $z\mapsto a_n z^n$ ont le même nombre de zéros dans le disque de rayon R, à savoir n.

6 Produits infinis

Soit $(z_k)_{k\geq 1}$ une suite de nombres complexes, on s'intéresse à la convergence du produit infini $\prod_{k\geq 1} z_k$.

Lemme 84. *Si $\sum(z_k - 1)$ converge absolument alors la suite $p_n = \prod_{k=1}^n z_k$ converge. De plus on a $\lim_n p_n = 0$ si et seulement s'il existe k tel que $z_k = 0$.*

Démonstration. Comme $\sum(z_k - 1)$ converge on a $z_k \to 1$. Donc il existe n_0 tel que $z_k \in D(1, 1)$ pour $k \geq n_0$. Alors $\log(z_k)$ est bien défini, où log désigne ici la détermination principale du logarithme. Comme $\log z \sim z - 1$ quand z tend vers 1, la série $\sum_{k\geq n_0} \log z_k$ est alors absolument convergente, donc convergente. Donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^n \log z_k$ existe. On appelle ℓ cette limite. En prenant l'exponentielle on en déduit $\lim_n \prod_{k=n_0}^n z_k = \mathrm{e}^\ell$. Donc la suite (p_n) converge vers $z_1 \cdot z_2 \cdots z_{n_0-1}\mathrm{e}^\ell$. Comme $\mathrm{e}^\ell \neq 0$ la limite est nulle si et seulement si l'un des z_k est nul. □

Exemple. Remarquons en revanche que $\prod_{k=1}^n z_k$ peut converger vers une limite nulle sans qu'aucun des z_k ne soit nuls. C'est par exemple le cas si $z_k = k/(k + 1)$ pour tout $k \geq 1$. Ce n'est pas en contradiction avec le lemme précédent puisque on a dans ce cas $\sum_{k\geq 1} |z_k - 1| = \sum_{k\geq 1} 1/(k + 1) = +\infty$.

Théorème 85. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un domaine Ω. Si $\sum_{n\geq 1}(f_n - 1)$ converge normalement sur tout compact de Ω alors $f = \prod f_n$ est holomorphe sur Ω. De plus, l'ensemble des zéros de f est égal à la réunion des zéros des f_n. L'ordre d'un zéro de f est égal à la somme des ordres de ce zéro pour chacune des f_n. De plus si $f(z) \neq 0$, la dérivée logarithmique de f en z est donnée par*

$$\frac{f'}{f}(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{f_n'}{f_n}(z), \tag{8}$$

la série de droite étant absolument convergente.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat au voisinage de chaque point, donc on peut en fait supposer que $\sum(f_n - 1)$ converge normalement sur Ω. Alors $f_n \to 1$ uniformément sur Ω. Il existe donc n_0 tel que $|f_n - 1| < 1$ sur Ω pour tout $n > n_0$. Alors $\log f_n$ est bien définie et holomorphe. Et encore une fois, comme $\log z \sim z - 1$ en 1, la série $\sum_{n>n_0} \log f_n$ converge normalement. On appelle g la somme de cette série. D'après le Théorème 63, la fonction g est holomorphe sur Ω. Donc $f = f_1 \cdots f_{n_0}\,\mathrm{e}^g$ est aussi holomorphe. Comme e^g ne s'annule pas, cette égalité montre bien que l'ensemble des zéros de f est égal à la réunion des zéros des f_n, les zéros étant comptés avec multiplicité. Pour la dernière partie du théorème, il faut utiliser un résultat vu en TD : pour une série de fonctions holomorphes la convergence normale implique la convergence normale des dérivées. On a donc $g' = \sum_{n\geq n_0} f_n'/f_n$ sur Ω. De plus, l'égalité $f = f_1 \cdots f_{n_0}\,\mathrm{e}^g$ implique

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} + g'(z)$$

pour tout vérifiant $f(z) \neq 0$. D'où le résultat. □

Ce théorème permet de factoriser les fonctions holomorphes en produits infinis. On ne va pas donner de résultat général dans cette direction et on va se contenter d'un exemple.

Théorème 86 (Formule de factorisation du sinus)**.** *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a*

$$\sin(\pi z) = \pi\, z \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Démonstration. Appelons $g(z)$ le membre de droite. Comme la série $\sum_{n\geq 1} z^2/n^2$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$, le Théorème 85 assure que g est une fonction entière. De plus, comme $1 - z^2/n^2$, admet deux zéros, en n et $-n$, simples tous les deux, le théorème assure aussi que les zéros de g sont exactement les entiers relatifs et qu'ils sont tous simples. Posons $h(z) = \sin(\pi z)/g(z)$. Alors h se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, pour tout entier relatif n, comme g et $\sin(\pi z)$ ont toutes les deux un zéro simple en n, le rapport $\sin(\pi z)/g(z)$ tend vers une limite finie en n. Donc la singularité de h en n est effaçable. Le même raisonnement montre d'ailleurs que h ne s'annule pas. Calculons la dérivée de h. Pour $z \notin \mathbb{Z}$

$$h'(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{g(z)} - \frac{\sin(\pi z) g'(z)}{g(z)^2} = \frac{\sin(\pi z)}{g(z)} \left(\pi \text{cotan}(\pi z) - \frac{g'(z)}{g(z)} \right).$$

Mais d'après le théorème précédent on peut prendre la dérivée logarithmique de g terme à terme dans le produit infini. On obtient

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{n^2 - z^2}.$$

En utilisant maintenant la Proposition 77 on en déduit $h'(z) = 0$, en tout cas pour $z \notin \mathbb{Z}$, mais en fait pour tout z par continuité de h'. Donc h est constante, et il existe une constante C telle que

$$\sin(\pi z) = C \, \pi \, z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

En utilisant $\sin(\pi z) \sim \pi z$ en 0, on obtient $C = 1$. □

On va maintenant étudier une fonction méromorphe particulière appelée fonction Γ d'Euler. Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose

$$\xi(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n! n^z}.$$

Il n'est pas évident que cette limite est bien définie. C'est l'objet du résultat suivant.

Proposition 87. *La fonction ξ est bien définie. C'est de plus une fonction entière. Ses zéros sont exactement les entiers négatifs ou nuls, et ils sont tous simples.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on ne change rien en remplaçant n^z par $(n+1)^z$ dans la définition de ξ. En effet $n^z/(n+1)^z \to 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ensuite on écrit $(n+1)^z = \prod_{k=1}^n (\frac{k+1}{k})^z$, ce qui permet de réécrire la définition de ξ la manière suivante

$$\xi(z) = \lim_{n \to \infty} z \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + \frac{z}{k}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^z}.$$

On pose

$$f_n(z) = \frac{1 + \frac{z}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}.$$

C'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ possédant un seul zéro, en $-n$, qui de plus est simple. De plus pour z fixé et n tendant vers l'infini on a $f_n(z) = 1 + O(|z|/n^2)$, ce qui montre que $\sum(f_n - 1)$ converge normalement sur tout compact. D'après le Théorème 85 le produit infini $\prod_{n \geq 1} f_n$ est convergent, il définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et il admet un zéro simple en chaque entier strictement négatif. D'où le résultat. □

Definition 88. L'inverse de la fonction ξ est appelée fonction Gamma d'Euler, notée Γ. C'est donc une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en chacun des entiers négatifs et ne possédant pas de zéro.

Lemme 89 (Équation fonctionnelle)**.** *Pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{N}_-$ on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Démonstration. On déduit facilement de la définition de ξ que $\xi(z+1) = \frac{1}{z}\xi(z)$ pour tout $z \neq 0$, ce qui donne le résultat cherché. □

La définition de ξ montre aussi que $\xi(1) = 1$, donc que $\Gamma(1) = 1$. En utilisant l'équation fonctionnelle on en déduit que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n > 0$.

Proposition 90 (Formule des compléments)**.** *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a*

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{\pi} \sin(\pi z).$$

Démonstration. D'après l'équation fonctionnelle et la définition de Γ on a

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{-1}{z\Gamma(z)\Gamma(-z)} = \lim_{n\to\infty} z \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{k}\right)$$
$$= z\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right).$$

On reconnaît alors le développement en produit infini de $\sin(\pi z)/\pi$ (Théorème 86). □

Remarque. Ce résultat montre en particulier que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Sur le demi-plan $\{\Re z>0\}$ la fonction Gamma peut aussi s'écrire comme une intégrale :

Proposition 91. *Pour z vérifiant $\Re z>0$ on a*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

Démonstration. Posons $f(z)=\int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt$. Commençons par montrer que f est bien définie et holomorphe sur $\{\Re z>0\}$. D'une part $z\mapsto t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction entière pour tout t. D'autre part si K est un compact de $\{\Re(z)>0\}$ alors il existe a,b strictement positifs tels que $a\le\Re z\le b$ pour tout $z\in K$. Alors

$$\sup_{z\in K}\{|t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}|\}\le t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}+t^{b-1}\mathrm{e}^{-t}$$

pour tout $t\ge 0$. Le membre de droite étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on obtient le résultat en appliquant le Théorème 64. Une intégration par partie montre ensuite que $f(z+1)=zf(z)$ pour tout z vérifiant $\Re z>0$. Autrement dit f vérifie la même équation fonctionnelle que Γ. Ceci montre que la fonction $g(z)=f(z)/\Gamma(z)$ est 1-périodique. A priori la fonction g est seulement définie sur $\{\Re z>0\}$ mais sa périodicité permet de l'étendre à $\mathbb{C}$ tout entier. Au passage, notons que ceci permet d'étendre la fonction f de manière méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, même si l'intégrale définissant $f(z)$ n'a de sens que pour $\Re z>0$. Par définition de Γ et en appliquant de nouveau l'équation fonctionnelle de f on a

$$g(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(z)\,z(z+1)\dots(z+n)}{n!\,n^z}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1+z)}{n!\,n^z}.$$

De plus pour $z=x+iy$ avec $x\in[0,1]$ on a en utilisant Hölder

$$|f(z+n+1)| = \left|\int_0^\infty t^{z+n}\mathrm{e}^{-t}\,dt\right| \le \int_0^\infty t^{x+n}\mathrm{e}^{-t}\,dt$$
$$\le\left(\int_0^\infty t^{n}\mathrm{e}^{-t}\,dt\right)^{1-x}\left(\int_0^\infty t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,dt\right)^{x} = n!^{1-x}(n+1)!^{x} = n!(n+1)^x.$$

En reportant dans l'égalité précédente et en faisant tendre n vers l'infini on déduit $|g(z)|\le 1$. Donc g est bornée sur la bande $\{0\le\Re(z)\le 1\}$. Comme g est 1-périodique elle est alors bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante par Liouville. Comme $g(1)=1$ cette constante est 1, ce qui donne le résultat. □