Table des matières

Introduction

L'étude de stabilité et l'analyse de sensibilité de la solution optimale par rapport aux perturbations directionnelles d'un paramètre des problèmes d'optimisation ont reçu l'intérêt de plusieurs chercheurs ces dernières années. Considérons le problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$\mathbf{P(y)} \quad \begin{cases} \min F(x,y), \\ G(x,y) \in K, \end{cases}$$

où F est la fonction-objectif définie de $X \times Z$ dans $I\!R$, G est une application de $X \times Z$ dans Y, K est un cône convexe fermé de Y et y est un paramètre dans Z un espace topologique; X, Y sont deux espaces de Banach.
Le but de ce travail est de répondre à la question suivante :

Sous quelles conditions sur f, la fonction $y \longrightarrow x(y)$ solution optimale de $P(y)$ satisfait-elle la stabilité de type Hölder et de type Lipschitz au voisinage de y_0 :

$$\| x(y) - x(y_0) \| \leq k_1 \| y - y_0 \|^{\alpha}, \ 0 < \alpha < 1,$$

$$\| x(y) - x(y_0) \| \leq k_2 \| y - y_0 \|,$$

où $x(y_0)$ est la solution optimale de $P(y_0)$, k_1 et k_2 sont respectivement les constantes de continuité Hölder et de continuité Lipschitz et $\| \, . \, \|$ désigne une norme quelconque de X ?

Dans notre étude, on s'intéressera à la stabilité de la solution optimale au voisinage de l'origine du problème de programmation mathématique élémentaire :

$$\mathcal{P}(\mathbf{y}) \quad \begin{cases} \min f(x), \\ Ax \in y + K, \end{cases}$$

où f est une fonction convexe continue pas nécessairement différentiable, A est un opérateur linéaire de X dans Y, y est un paramètre; X et Y sont deux espaces de dimension finie et K est un cône polyédral de $Y = I\!R^m$ défini par :

$$K = \{y \in I\!R^m,\, y_i = 0\,(1 \leq i \leq r)\,,\, y_i \geq 0\,(r+1 \leq i \leq m)\}.$$

En dimension finie et dans le cas différentiable, la stabilité de la solution optimale a été traitée par Robinson [29, 30], Fiacco [12] et autres, cette analyse utilise un théorème généralisé des fonctions implicites. En fait, sous la condition d'indépendance des gradients des contraintes actives et de la condition suffisante d'optimalité du second ordre et pour y assez petit au voisinage de y_0, le problème $P(y)$ a une unique solution $x(y)$ lipschitzienne et directionnellement différentiable. Des résultats de continuité avec de petites perturbations dans le cas convexe ont été obtenus par Aubin [1] et par Cornet, Vial [10]. Les propriétés lipschitziennes et hölderiennes avec des perturbations directionnelles ainsi que la dérivée de la fonction valeur ont été étudiées notamment par Janin-Gauvin [14] et par Auslender, Cominetti [2].

Supposons que la condition de Mangasarian-Fromovitz soit satisfaite en x_0 solution optimale de $\mathcal{P}(0)$:

$$\begin{array}{c}\text{(a) } A^i\,(1 \leq i \leq r) \text{ sont linéairement indépendants.}\\ \text{(b) } \exists z \in I\!R^n \text{ tel que } A^i z = 0\,(1 \leq i \leq r),\ A^i z > 0,\ i \in I(x_0),\end{array}$$

où $I(x)$ désigne l'ensemble des indices des contraintes actives et supposons que la fonction-objectif f satisfasse les hypothèses de croissance suivantes :

$$\exists \rho, \epsilon > 0,\ f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0, x - x_0) + \frac{\rho}{q} \parallel x - x_0 \parallel_q^q,\ \forall x \in B(x_0, \epsilon), \quad (0.1)$$

$$\exists R, \epsilon > 0,\ f(x) \leq f(x_0) + Df(x_0, x - x_0) + \frac{R}{p} \parallel x - x_0 \parallel_p^p, \forall x \in B(x_0, \epsilon), \quad (0.2)$$

Lemaréchal et Sagastizábal [24] ont étudié le reste du développement à l'ordre un d'une fonction convexe et les relations entre primal et dual; ils ont montré que la condition de croissance (0.2) est satisfaite si et seulement si le sous différentiel associé vérifie la condition de croissance linéaire. Les mêmes auteurs [25] ont utilisé cette condition dans l'étude de la régularisée de Moreau-Yosida d'une fonction convexe, le résultat principal est une relation entre l'existence d'un développement du second ordre de la fonction et le Hessien de sa régularisée.

Bonnans et Cominetti [3] ont montré que si la solution optimale satisfait à la continuité Lipschitz alors nécessairement le programme "linéarisé" au voisinage de la

solution optimale x_0 possède une solution optimale. Moyennant une hypothèse supplémentaire, comparable à notre hypothèse de majoration de la croissance, Shapiro [32] a montré que l'existence de la solution optimale du programme "linéarisé" était suffisante pour obtenir la continuité Lipschitz.
L'existence d'une solution du programme "linéarisé" est assurée lorsque le programme dual (Rockaffelar [31]) est stable. La condition obtenue par nous garantit la stabilité du programme dual donc l'existence d'une solution optimale, mais apporte en plus une évaluation des constantes de Hölder et de Lipschitz.

Bonnans, Ioffe [8] ont caractérisé la croissance quadratique pour un problème min-max convexe à données C^2 avec solutions multiples en dimension finie. Dans [18], l'auteur a fait l'étude dans un espace de Banach pour les problèmes avec contraintes en les écrivant sous forme de problèmes sans contraintes via l'optimisation composite.

Dans [6, 7, 33], l'introduction des conditions d'optimalité du second ordre des problèmes non perturbés en utilisant les concepts des ensembles tangents et des ensembles d'approximation supérieure a joué un rôle très important dans l'étude de la stabilité. Bonnans, Cominetti et Shapiro [34, 4, 5] ont traité les problèmes d'optimisation avec paramètre dans un espace de Banach quand la condition de qualification de Robinson est vérifiée suivant une direction et quand les multiplicateurs de Lagrange existent et satisfont faiblement la condition suffisante du second ordre.

La première partie de cette thèse (chapitre 2) est réservée à la majoration du reste du développement à l'ordre deux de la fonction valeur définie par :

$$v(y) = \inf_{Ax \in y+K} f(x) \tag{0.3}$$

au voisinage de l'origine sous la condition de Mangasarian-Fromovitz et l'hypothèse (0.2) de majoration de la croissance d'ordre p (pour une norme ℓ_p), cette majoration est en fonction du cône tangent :

$$K_0 = \{y \in I\!R^m,\, y_i = 0\,(1 \leq i \leq r)\,,\, y_i \geq 0,\, i \in I(x_0)\}.$$

En choisissant la norme ℓ_p de telle sorte qu'on ait un "théorème de Pythagore" et en utilisant une sous matrice A_L de A, nous obtenons une majoration du terme :

$$v(y) - v(0) - Dv(0, y).$$

Si de plus f satisfait l'hypothèse de minoration de la croissance d'ordre q (pour une norme ℓ_q), p et q étant deux réels > 1, nous obtenons alors une stabilité hölderienne de la solution optimale dans le cas où $p < q$ et la réponse à la première partie de la question est $\alpha = \frac{p}{q}$ et la constante de continuité Hölder est donnée en fonction de $\sum(f,y)$ sous-ensemble de $\partial f(x_0)$:

$$k_1 = \Big(\frac{q}{p}\frac{R}{\rho}(1 + \sup_{\sigma\in\sum(f,y)} \frac{\| \sigma - \tilde{\sigma} \|_{p*}^{p}}{\| (I - A_L^{\sharp}A_L)(\sigma - \tilde{\sigma}) \|_{p*}^{p}})\Big)^{\frac{1}{q}} \| A_L^{\sharp} \|_p^{\frac{p}{q}} \quad \text{si } \sum(f,y) \neq \emptyset,$$

$$k_1 = \Big(\frac{q}{p}\frac{R}{\rho}\Big)^{\frac{1}{q}} \| A_L^{\sharp} \|_p^{\frac{p}{q}} \quad \text{si } \sum(f,y) = \emptyset,$$

nous récupérons la stabilité de type Lipshitz dans le cas où $p = q$, plusieurs idées s'appuient sur le travail récent de Janin et Gauvin [21].

Dans le cas de contraintes égalité ($K = \{0\}$), Janin et Gauvin [20] ont obtenu un résultat de stabilité de type Lipschitz de la solution optimale suivant des perturbations directionnelles du paramètre y sous les conditions de croissance sub-quadratique et super-quadratique :
$\exists \rho > 0,\ f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0, x - x_0) + \dfrac{\rho}{2} \| x - x_0 \|^2,\ \forall x \in X,$
$\exists R > 0,\ f(x) \leq f(x_0) + Df(x_0, x - x_0) + \dfrac{R}{2} \| x - x_0 \|^2, \forall x \in X.$
Nous montrerons dans le chapitre 3 que cette dépendance reste valable dans le cas hilbertien, l'introduction d'un sous-ensemble de $\partial f(x_0)$ joue un rôle important dans cette étude :

$$\Sigma = \{\sigma \in \partial f(x_0), (\sigma, A^{\sharp}y) > Dv(y_0, y)\},$$

$A^{\sharp} = A^T(AA^T)^{-1}$ étant le pseudo-inverse de A. Comme démarche, on donnera des résultats du second ordre d'un problème dont la fonction-objectif est la somme d'une fonction sous linéaire et d'un terme quadratique ce qui nous ramènera à établir une estimation du terme :

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{2}{t^2}\Big(v(ty) - v(0) - tDv(0,y)\Big).$$

Comme application, on étudiera le problème de Mossolov-Miasnikov en dimension un avec des conditions non nulles au bord :

$$\text{Minimiser } J(v) = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 |v'(x)|^2 dx + \beta\int_0^1 |v'(x)|dx - \int_0^1 F(x)v(x)dx, v \in H^1,$$

$$\text{sous la contrainte : } Av = (v(0), v(1)) = \theta \in I\!R^2,$$

on démontrera au passage l'existence et l'unicité de la fonction de Green pour un problème elliptique. Nous terminerons ce chapitre par un résultat de stabilité de type Lipschitz avec une hypothèse super-quadratique plus faible.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous donnons quelques résultats d'analyse convexe [31, 9, 17] concernant la fonction polaire et la fonction valeur d'un problème d'optimisation à contraintes égalité et leurs propriétés.

1.1 Fonction polaire et fonction valeur

Soient X et Y deux espaces de Hilbert munis du produit scalaire $(.,.)$, on identifiera X et Y avec leurs duals, $f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe continue et A un opérateur linéaire de X dans Y.
On considère le programme élémentaire convexe suivant :

$$\text{Minimiser}\, f(x) \,\text{sous la contrainte}\, Ax = y. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.1 *La fonction valeur associée au problème (1.1) notée v est définie par :*

$$v(y) = \inf_{Ax=y} f(x). \tag{1.2}$$

Définition 1.1.2 *La fonction polaire de f notée f^* est définie par :*

$$f^*(y) = \sup\{(x, y) - f(x)/x \in X\}, \forall y \in X^*. \tag{1.3}$$

On note $\partial f(x)$ le sous-différentiel de f au point x, c'est l'ensemble des sous-gradients de f en x, où encore :

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^*/(y - x, x^*) + f(x) \leq f(y), \forall y \in X\}. \tag{1.4}$$

On a aussi la caractérisation suivante du sous-différentiel d'une fonction convexe, Voir (I Proposition 5.1 [13]):

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* / f^*(x^*) + f(x) = (x^*, x)\}.$$

On remarquera quelques propriétés de la fonction polaire :

$$\text{Si } f_1 \leq f_2 \text{ alors } f_1^* \geq f_2^*. \tag{1.5}$$

$$(\inf_{i \in I} f_i)^* = \sup_{i \in I} f_i^* \text{ et } (\sup_{i \in I} f_i)^* \leq \inf_{i \in I} f_i^*, \tag{1.6}$$

I étant un ensemble quelconque.

$$(\lambda f)^*(p) = \lambda f^*(p/\lambda), \; \forall \lambda > 0. \tag{1.7}$$

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{p}||x||^p \; (1 < p < +\infty) \text{ alors } f^*(x) = \frac{1}{q}||x||^q, \tag{1.8}$$

où q est le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Définition 1.1.3 *Soient g et h deux fonctionnelles sur X, on définit l'inf-convolution de g et h noté $g \nabla h$ par :*

$$(g \nabla h)(z) = \inf_{x \in X} \{g(x) + h(z - x)\}.$$

Si f_1 et f_2 sont finies et continues en $x_0 \in X$, alors :

$$(f_1 + f_2)^* = f_1^* \nabla f_2^*. \tag{1.9}$$

La fonction polaire de la fonction valeur définie par (1.2) est donnée par (Voir X Theorem 2.1.1 [17]) :

Théorème 1.1.1 *Si $Im\, A^* \cap Dom\, f^* \neq \emptyset$, alors $v^* = f^* \circ A^*$.*

Lemme 1.1.1 *Si v est continue au point y_0 de Y, alors le sous-différentiel de v en y_0 est donné par :*

$$\partial v(y_0) = \{\eta \in Y / \; A^* \eta \in \partial f(x_0)\}.$$

Preuve. Soit $\eta \in \partial v(y_0)$ ce qui est équivalent à : $v^*(\eta) + v(y_0) = (\eta, y_0)$,
or : $v^* = f^* \circ A^*$ et $v(y_0) = f(x_0)$, par conséquent :
$f^*(A^*\eta) + f(x_0) = (A^*\eta, x_0)$, soit encore, si et seulement si : $A^*\eta \in \partial f(x_0)$ et la démonstration du lemme est achevée. $\square$

La dérivée directionnelle d'une fonction convexe est liée au sous-différentiel par la relation suivante, voir (VI Théorème 6.4.8 [23]) :

Théorème 1.1.2 *Si f est convexe et si f est continue en x_0, alors :*

$$Df(x_0, h) = \max\{(\xi, h)/\xi \in \partial f(x_0)\}.$$

Pour plus de détails sur les autres propriétés de la fonction valeur d'un problème convexe, voir [17, 31] dans le cas de dimension finie et [9, 35] dans le cas de dimension infinie.

Si f est différentiable, alors ∇f est continue de X dans X. Dans le cas non différentiable, ce gradient devient un ensenble ∂f qui possède des propriétés de continuité [17], nous nous contentons de rappeler deux propriétés qui nous seront utiles dans ce manuscrit, voir (I Proposition 5.6 et Proposition 5.7 [13]) :

Théorème 1.1.3 *Soient f_1 et f_2 dans $\Gamma(X)$ et $x_* \in Dom f_1 \cap Dom f_2$ où f_1 ou f_2 est continue, alors, $\forall x \in X$, on a :*

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x). \tag{1.10}$$

Si f continue et finie en By_*, où B est un opérateur linéaire de Y dans X, alors $\forall y \in Y$, on a :

$$\partial(f \circ B)(y) = B^* \partial f(By). \tag{1.11}$$

Chapitre 2

Analyse de stabilité d'un problème convexe perturbé non différentiable

Dans ce chapitre, nous donnons une majoration du reste du développement à l'ordre deux de la fonction valeur au voisinage de l'origine d'un problème convexe en dimension finie avec des contraintes inégalité dans le cas non différentiable. Par la suite, nous démontrons des résultats de stabilité de la solution optimale de type Hölder et de type Lipschitz sous des hypothèses de croissance.

2.1 Position du problème et hypothèses

Dans cette étude, on se place dans le cas de dimension finie ($X = I\!R^n$ et $Y = I\!R^m$), on considère le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ Ax \in y + K, \end{cases} \tag{2.1}$$

où f est une fonction convexe continue, A est un opérateur linéaire surjectif de X dans Y (on notera par A^i les vecteurs lignes de A) et K désigne le cône polyhédral de $I\!R^m$ défini par :

$$K = \{y \in I\!R^m,\, y_i = 0\,(1 \leq i \leq r)\,,\, y_i \geq 0\,(r+1 \leq i \leq m)\}.$$

On fait les hypothèses suivantes sur f

H1 : (Condition de minoration de la croissance d'ordre q)

$\exists\rho > 0$, tel que, $f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0, x - x_0) + \dfrac{\rho}{q} \parallel x - x_0 \parallel_q^q, \forall x \in B(x_0, \epsilon)$,

H2 : (Condition de majoration de la croissance d'ordre p)

$\exists R > 0$, tel que, $f(x) \leq f(x_0) + Df(x_0, x - x_0) + \dfrac{R}{p} \parallel x - x_0 \parallel_p^p, \forall x \in B(x_0, \epsilon)$,

où : $Df(x_0, h) = \lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{1}{t}(f(x_0 + th) - f(x_0))$, x_0 est une solution optimale du problème (2.1) associée à $y = 0$, $B(x_0, \epsilon)$ la boule ouverte de $I\!R^n$ de centre x_0 et de rayon ϵ, $\parallel . \parallel_p$ et $\parallel . \parallel_q$ sont respectivement les normes $\ell(p)$ et $\ell(q)$ par rapport à une base de $I\!R^n$ formée de vecteurs base de $KerA$ et de vecteurs base de $ImA^\sharp$, p et q étant deux réels tels que $q \geq p > 1$ et $A^\sharp = A^T(AA^T)^{-1}$ le pseudo-inverse de A.

Remarque 2.1.1 *On prend une norme $\ell(p)$ (ou $\ell(q)$) de telle sorte qu'on a un "théorème de Pythagore" :*
Si $X = X_1 \oplus X_2$, où $X_1 = KerA$ et $X_2 = ImA^\sharp$ et si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, alors :

$$\parallel x \parallel_p^p = \parallel x_1 \parallel_p^p + \parallel x_2 \parallel_p^p .$$

L' égalité précédente n'est pas valable pour les autres décompositions de X.

On suppose que la condition de Mangazarian-Fromovitz (CMF) est réalisée pour x_0 solution du problème (2.1) associée à $y = 0$, i.e :
(a) $A^i \, (1 \leq i \leq r)$ sont linéairement indépendants.
(b) $\exists z \in I\!R^n$ tel que

$$A^i z = 0 \, (1 \leq i \leq r), \;\; A^i z > 0, \, i \in I(x_0),$$

où $I(x)$ désigne l'ensemble des indices des contraintes actives :

$$I(x) = \{i, \, r + 1 \leq i \leq m, \;\; A^i x = 0\}.$$

Sous la condition (CMF), il existe des multiplicateurs de Lagrange Kuhn-Tucker, i.e :
$\exists\lambda \in K^+ = \{\lambda \in I\!R^m, \, \lambda^T u \geq 0, \forall u \in K\}$, tel que :

$$A^T\lambda \in \partial f(x_0), \;\; \lambda^T A x_0 = 0, \tag{2.2}$$

où encore

$$\lambda_i \geq 0, i \in I(x_0), \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A^{iT} \in \partial f(x_0), \, \lambda_i A^i x_0 = 0, \, (1 \leq i \leq m). \tag{2.3}$$

On note

$$\Lambda(x_0) = \{\lambda \in I\!R^m, \lambda \text{ satisfait } (2.3)\}.$$

$$v(y) = \inf_{Ax \in y+K} f(x).$$

$$\sum(f,h) = \Big\{\sigma \in \partial f(x_0), (\sigma, A^\sharp h) > (\lambda, h), \forall \lambda \in \Lambda(x_0)\Big\}.$$

On vérifie que (voir [31]) :

$$\partial v(0) = \Lambda(x_0).$$

2.2 Stabilité de type Hölder

Les deux lemmes qui suivent donnent une majoration du reste du développement à l'ordre deux de la fonction valeur au voisinage de l'origine.

Lemme 2.2.1 *Sous la condition (CMF) et l'hypothèse de majoration de la croissance d'ordre p, il existe $\delta > 0$, tel que pour toute perturbation y vérifiant $\| y \| \leq \delta$, la fonction valeur du problème (2.1) satisfasse :*

$$v(y) \leq v(0) + \min_{Ah \in y+K_0} \Big\{ Df(x_0,h) + \frac{R}{p} \| h \|_p^p \Big\},$$

où

$$K_0 = \{y \in I\!R^m,\, y_i = 0\,(1 \leq i \leq r)\,,\, y_i \geq 0,\, i \in I(x_0)\}.$$

Preuve. Soit $\epsilon' > 0$ tel que $\epsilon' \leq \epsilon$.
Comme $x(.)$ est continue au point $y = 0$, voir [21] , alors
$\exists \epsilon_1 > 0$, tel que, pour $\| y \| \leq \epsilon_1$, on ait $x(y) \in B(x_0, \epsilon')$.
D'après l'hypothèse **H2**, $\forall h \in B(0, \epsilon')$ tel que $A(x_0 + h) \in y + K$,

$$v(y) \leq f(x_0 + h) \leq f(x_0) + Df(x_0, h) + \frac{R}{p} \| h \|_p^p,$$

ce qui implique

$$v(y) - v(0) \leq \min_{h \in B(0,\epsilon'), A(x_0+h) \in y+K} \Big\{ Df(x_0,h) + \frac{R}{p} \| h \|_p^p \Big\}.$$

On peut choisir ϵ' tel que

$$\{x \in I\!R^n,\, x \in B(x_0, \epsilon'),\, Ax \in y + K_0\} = \{x \in I\!R^n,\, x \in B(x_0, \epsilon'),\, Ax \in y + K\},$$

en effet, notons le premier ensemble par T_0 et le deuxième par T_1.
Il est clair que $T_1 \subset T_0$, car $K \subset K_0$.
Inversement, on pose

$$\alpha = \min_{i \notin I(x_0)} A^i x_0,$$

pour $\epsilon_2 = \dfrac{\alpha}{3}$, soit $x \in B(x_0, \epsilon')$ tel que

$$|A^i(x - x_0)| \leq \epsilon_2, \, \forall i \notin I(x_0),$$

soit alors x et y tel que

$$\| y \| \leq \epsilon_2, \; x \in B(x_0, \epsilon'), Ax \in y + K_0,$$

pour $i \notin I(x_0)$,

$$A^i x - y^i = A^i(x - x_0) + A^i x_0 - y^i \geq -\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + \alpha > 0,$$

donc $Ax \in y + K$ et alors $T_0 \subset T_1$ pour un ϵ' bien choisi.
Soit $\epsilon_3 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, pour $\| y \| \leq \epsilon_3$, on a

$$v(y) \leq v(0) + \min_{h \in B(0,\epsilon'), A(x_0+h) \in y + K_0} \left\{ Df(x_0, h) + \frac{R}{p} \| h \|_p^p \right\}.$$

$A(x_0 + h) \in y + K_0$ est équivalent à : $Ah \in y - Ax_0 + K_0$.
Comme $-Ax_0 \in K_0$ donc $-Ax_0 + K_0 = K_0$, par conséquent, pour $\| y \| \leq \epsilon_3$, on a

$$v(y) \leq v(0) + \min_{h \in B(0,\epsilon'), Ah \in y + K_0} \left\{ Df(x_0, h) + \frac{R}{p} \| h \|_p^p \right\}.$$

Puisque $h(y)$ qui minimise le deuxième terme de l'inégalité précédente est continue au voisinage de $y = 0$ et comme $h = 0$ est la solution pour $y = 0$, alors il existe $\epsilon_4 > 0$ tel que $\| h(y) \| \leq \epsilon'$ pour $\| y \| \leq \epsilon_4$, on déduit alors le lemme 2.2.1.

Lemme 2.2.2 *Sous la condition (CMF) et l'hypothèse de majoration de la croissance d'ordre p, il existe $\delta > 0$, tel que, pour toute perturbation y vérifiant $\| y \| \leq \delta$, la fonction valeur du problème (2.1) satisfasse :*

$$v(y) \leq v(0) + \max_{\sigma \in \partial f(x_0)} \min_{Ah \in y + K_0} \left\{ (\sigma, h) + \frac{R}{p} \| h \|_p^p \right\}.$$

Preuve. Comme f convexe, continue en x_0, alors

$$Df(x_0,h) = \max_{\sigma\in\partial f(x_0)}(\sigma,h),$$

en utilisant le lemme 2.2.1, on obtient

$$v(y) \leq v(0) + \min_{Ah\in y+K_0}\max_{\sigma\in\partial f(x_0)}\left\{(\sigma,h)+\frac{R}{p}\parallel h\parallel_p^p\right\}.$$

La fonction $h \xrightarrow{\varphi} (\sigma,h)+\dfrac{R}{p}\parallel h\parallel_p^p$ est convexe et vérifie $\lim\limits_{\|h\|\to+\infty}\varphi(h)=+\infty$ et la fonction $\sigma \xrightarrow{\phi} (\sigma,h)+\dfrac{R}{p}\parallel h\parallel_p^p$ est concave sur le compact $\partial f(x_0)$, en utilisant le théorème du point selle (VII Theorem 4.3.1 [17]), on obtient

$$\min_{Ah\in y+K_0}\max_{\sigma\in\partial f(x_0)}\left\{(\sigma,h)+\frac{R}{p}\parallel h\parallel_p^p\right\} = \max_{\sigma\in\partial f(x_0)}\min_{Ah\in y+K_0}\left\{(\sigma,h)+\frac{R}{p}\parallel h\parallel_p^p\right\},$$

ce qui achève la démonstration. □

Le théorème suivant donne une majoration du reste du développement à l'ordre deux de la fonction valeur au voisinage de l'origine sous la condition de majoration de la croissance d'ordre p.

Théorème 2.2.1 *Si f satisfait la condition de majoration de la croissance d'ordre p et si la (CMF) est réalisée, alors, il existe $\delta>0$, tel que, pour toute perturbation y vérifiant $\parallel y\parallel\leq\delta$, on ait*
1) Il existe $\tilde\sigma\in\partial f(x_0)$, $\lambda\in I\!R^m$, $\lambda_i\geq 0$, $i\in I(x_0)$ et une sous matrice A_L de A, tels que

$$rgA_L = rgA,\;\; A_L^T\lambda=\tilde\sigma,\;\; (\lambda, A_Lx_0)=0,\;\; Dv(0,y)=(\tilde\sigma, A_L^\sharp y).$$

2) Si on pose :

$$\sum(f,h)=\{\sigma\in\partial f(x_0),(\sigma,A_L^\sharp h)>(\lambda,h),\forall\lambda\in\Lambda(x_0)\},$$

l'alternative suivante est vérifiée :
Soit $\sum(f,y)=\emptyset$, dans ce cas

$$v(y)-v(0)\leq Dv(0,y)+\frac{R}{p}\parallel A_L^\sharp y\parallel_p^p.$$

Soit $\sum(f,y) \neq \emptyset$, dans ce cas

$$v(y) - v(0) \leq Dv(0,y) + \frac{R}{p}\Big\{ \parallel A_L^\sharp y \parallel_p^p + \sup_{\sigma \in \sum(f,y)} \Big(\frac{(\sigma - \tilde{\sigma}, A_L^\sharp y)}{\parallel (I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma}) \parallel_{p*}} \Big)^p \Big\},$$

où $p*$ est le conjugué de p et I l'opérateur identité de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. D'après le lemme 2.2.2, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $\parallel y \parallel \leq \delta$, on ait

$$v(y) \leq v(0) + \max_{\sigma \in \partial f(x_0)} \min_{Ah \in y + K_0} \Big\{ (\sigma, h) + \frac{R}{p} \parallel h \parallel_p^p \Big\}.$$

On a

$$Dv(0,y) = \max_{\lambda \in \Lambda(x_0)} \lambda^T y,$$

il existe $\tilde{\sigma} \in \partial f(x_0)$ tel que

$$Dv(0,y) = \max\{\lambda^T y,\ A^T \lambda = \tilde{\sigma},\ \lambda_i \geq 0 (i \in I(x_0))\}, \tag{2.4}$$

le terme de droite de l'égalité dans (2.4) est un problème linéaire de maximisation, le problème dual associé est

$$\begin{cases} \min \tilde{\sigma}^T \xi, \\ A^i \xi = y_i \, (1 \leq i \leq r), \\ A^i \xi \geq y_i \, (i \in I(x_0)), \end{cases} \tag{2.5}$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions admissibles du problème (2.5) et $\mathcal{F} = ImA^\sharp$ le sous espace orthogonal à $KerA$. $\mathcal{S}$ est convexe, fermé et polyhédral, on peut écrire

$$\mathcal{S} = \mathcal{S} \cap \mathcal{F} + KerA.$$

La fonction-objectif de (2.5) est linéaire, donc le minimum est atteint et il est unique, soit ξ_0 ce minimum, ξ_0 est extrémal et vérifie $m = rg(A^T)$. Soit A_L la sous matrice corespondante à A, donc

$$\xi_0 = A_L^\sharp y \text{ et } A_L^\sharp y + KerA \subset \{h, Ah \in y + K_0\}.$$

On obtient alors :

$$v(y) - v(0) \leq \max_{\sigma \in \partial f(x_0)} \min_{h \in A_L^\sharp y + KerA} \Big\{ (\sigma, h) + \frac{R}{p} \parallel h \parallel_p^p \Big\}. \tag{2.6}$$

On a

$$\min_{h\in A_L^\sharp y+KerA}\left\{(\sigma,h)+\frac{R}{p}\parallel h\parallel_p^p\right\}=(\sigma,A_L^\sharp y)+\min_{z\in KerA}\left\{(\sigma,z)+\frac{R}{p}\parallel A_L^\sharp y+z\parallel_p^p\right\}.$$

La remarque 2.1.1 nous permet d'écrire :

$$\min_{h\in A_L^\sharp y+KerA}\left\{(\sigma,h)+\frac{R}{p}\parallel h\parallel_p^p\right\}=\frac{R}{p}\parallel A_L^\sharp y\parallel_p^p+(\sigma,A_L^\sharp y)+\min_{z\in KerA}\left\{(\sigma,z)+\frac{R}{p}\parallel z\parallel_p^p\right\}.$$

Pour σ fixé dans $\partial f(x_0)$, considérons l'application g définie de $KerA$ dans $I\!R$ par

$$g(x)=(\sigma,x)+\frac{R}{p}\parallel x\parallel_p^p=g_1(x)+g_2(x),$$

avec $g_1(x)=(\sigma,x)=((I-A_L^\sharp A_L)\sigma,x)$ et $g_2(x)=\dfrac{R}{p}\parallel x\parallel_p^p$.
On a

$$\begin{aligned} g_1^*(z) &= \sup_{x\in KerA}\{(z,x)-((I-A_L^\sharp A_L)\sigma,x)\}\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } z=(I-A_L^\sharp A_L)\sigma,\\ +\infty & \text{sinon,}\end{cases}\end{aligned}$$

et $g_2^*(z)=\dfrac{1}{R^{p*-1}p*}\parallel z\parallel_{p*}^{p*}$.
En utilisant (1.9), la fonction polaire de g est donnée par

$$\begin{aligned} g^*(z) &= (g_1^*\nabla g_2^*)(z)\\ &= \frac{1}{R^{p*-1}p*}\parallel z-(I-A_L^\sharp A_L)\sigma\parallel_{p*}^{p*},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\min_{z\in KerA}\left\{(\sigma,z)+\frac{R}{p}\parallel z\parallel_p^p\right\} &= -g^*(0)\\ &= -\frac{1}{R^{p*-1}p*}\parallel (I-A_L^\sharp A_L)\sigma\parallel_{p*}^{p*}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$v(y)-v(0)\leq\frac{R}{p}\parallel A_L^\sharp y\parallel_p^p+\max_{\sigma\in\partial f(x_0)}\left\{(\sigma,A_L^\sharp y)-\frac{1}{R^{p*-1}p*}\parallel (I-A_L^\sharp A_L)\sigma\parallel_{p*}^{p*}\right\}.$$

Soit $\tilde\sigma\in\mathcal{F}$ tel que $Dv(0,y)=(\tilde\sigma,A_L^\sharp y)$, on peut écrire alors
$v(y)-v(0)\leq Dv(0,y)+\dfrac{R}{p}\parallel A_L^\sharp y\parallel_p^p+$

$$\max_{\sigma\in\partial f(x_0)}\left\{(\sigma-\tilde\sigma,A_L^\sharp y)-\frac{1}{R^{p*-1}p*}\parallel (I-A_L^\sharp A_L)\sigma\parallel_{p*}^{p*}\right\}.$$

Posons
$$E = \max_{\sigma \in \partial f(x_0)} \Big\{ (\sigma - \tilde{\sigma}, A_L^\sharp y) - \frac{1}{R^{p*-1} p*} \parallel (I - A_L^\sharp A_L)\sigma \parallel_{p*}^{p*} \Big\}.$$
Comme $(I - A_L^\sharp A_L)\tilde{\sigma} = 0$ alors $(I - A_L^\sharp A_L)\sigma = (I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma})$ et par conséquent
$$E = \max_{\sigma \in \partial f(x_0)} \Big\{ (\sigma - \tilde{\sigma}, A_L^\sharp y) - \frac{1}{R^{p*-1} p*} \parallel (I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma}) \parallel_{p*}^{p*} \Big\}.$$
Le sup sur $\partial f(x_0)$ peut être étendu au sup sur $\tilde{\sigma} + I\!R^+(\partial f(x_0) - \tilde{\sigma})$, donc
$$E \leq \sup_{\sigma \in \partial f(x_0)} \sup_{t \geq 0} \Big\{ t(\sigma - \tilde{\sigma}, A_L^\sharp y) - \frac{t^{p*}}{R^{p*-1} p*} \parallel (I - A_L^\sharp A_L)\sigma \parallel_{p*}^{p*} \Big\},$$
où encore
$$E \leq \begin{cases} 0 & \text{si } (\sigma - \tilde{\sigma}, A_L^\sharp y) > 0, \\ \Big(\dfrac{(\sigma - \tilde{\sigma}, A_L^\sharp y)}{\parallel (I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma}) \parallel_{p*}} \Big)^p & \text{sinon,} \end{cases}$$
ce qui achève la démonstration.

Théorème 2.2.2 *Si f satisfait les conditions de majoration et de minoration de la croissance d'ordres respectifs p et q $(1 < p < q)$ et si la (CMF) est réalisée, alors, il existe $\delta > 0$, tel que, pour toute perturbation y vérifiant $\parallel y \parallel \leq \delta$, on ait l'alternative suivante :*
Soit $\sum(f, y) \neq \emptyset$, dans ce cas :
$$\parallel x(y) - x_0 \parallel_q \leq \Big(\frac{q}{p} \frac{R}{\rho} (1 + \sup_{\sigma \in \sum(f,y)} \frac{\parallel \sigma - \tilde{\sigma} \parallel_{p*}^p}{\parallel (I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma}) \parallel_{p*}^p}) \Big)^{\frac{1}{q}} \parallel A_L^\sharp \parallel_p^{\frac{p}{q}} \parallel y \parallel_p^{\frac{p}{q}} .$$
Soit $\sum(f, y) = \emptyset$, dans ce cas :
$$\parallel x(y) - x_0 \parallel_q \leq \Big(\frac{q}{p} \frac{R}{\rho} \Big)^{\frac{1}{q}} \parallel A_L^\sharp \parallel_p^{\frac{p}{q}} \parallel y \parallel_p^{\frac{p}{q}},$$
où $\parallel A \parallel_p = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \dfrac{\parallel Ax \parallel_p}{\parallel x \parallel_p}$.

Preuve. D'après l'hypothèse **H1**, on a
$$\frac{\rho}{q} \parallel x(y) - x_0 \parallel_q^q \leq f(x) - f(x_0) - Df(x_0, x - x_0) \text{ pour } x \in B(x_0, \epsilon).$$

Pour $x(y) \in B(x_0, \epsilon)$, on a

$$\frac{\rho}{q} \parallel x(y) - x_0 \parallel_q^q \leq f(x(y)) - f(x_0) - Df(x_0, x(y) - x_0).$$

Comme

$$Df(x_0, x(y) - x_0) = \max_{\xi \in \partial f(x_0)} (\xi, x(y) - x_0),$$

$\dfrac{\rho}{q} \parallel x(y) - x_0 \parallel_q^q \leq f(x(y)) - f(x_0) - (\xi, x(y) - x_0), \ \forall \xi \in \partial f(x_0).$
On choisit les $\xi \in \partial f(x_0)$ tel que $\xi = A^T \lambda$ avec λ vérifiant (2.2), donc

$$\frac{\rho}{q} \parallel x(y) - x_0 \parallel_q^q \leq v(y) - v(0) - (A^T \lambda, x(y) - x_0),$$

où encore

$$\frac{\rho}{q} \parallel x(y) - x_0 \parallel_q^q \leq v(y) - v(0) - (\lambda, Ax(y) - y) - (\lambda, y) + (\lambda, Ax_0),$$

comme $(\lambda, Ax_0) = 0$ et $(\lambda, Ax(y) - y) \geq 0$, alors

$$\frac{\rho}{q} \parallel x(y) - x_0 \parallel_q^q \leq v(y) - v(0) - (\lambda, y), \text{ pour } \lambda \in \partial v(0).$$

On sait que : $Dv(0, y) = \max\limits_{\sigma \in \partial v(0)} (\sigma, y)$, donc

$$\frac{\rho}{q} \parallel x(y) - x_0 \parallel_q^q \leq v(y) - v(0) - Dv(0, y).$$

En appliquant le théorème 2.2.1, on obtient
dans le cas où $\sum(f, y) = \emptyset$,

$$\frac{\rho}{q} \parallel x(y) - x_0 \parallel_q^q \leq \frac{R}{p} \parallel A_L^\sharp y \parallel_p^p$$

et dans le cas où $\sum(f, y) \neq \emptyset$,

$$\frac{\rho}{q} \parallel x(y) - x_0 \parallel_q^q \leq \frac{R}{p} \Big\{ \parallel A_L^\sharp y \parallel_p^p + \sup_{\sigma \in \sum(f,y)} \Big(\frac{(\sigma - \tilde{\sigma}, A_L^\sharp y)}{\parallel (I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma}) \parallel_{p*}} \Big)^p \Big\}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on achève la démonstration.

2.3 Stabilité de type Lipschitz

Supposons dans cette section que les conditions de majoration et de minoration de la croissance sont de même ordre ($p = q$), le résultat suivant donne une stabilité de type Lipschitz de la solution optimale.

Théorème 2.3.1 *Si f satisfait les conditions de majoration et de minoration de la croissance avec ($p = q$) et si la (CMF) est réalisée, alors, il existe $\delta > 0$, tel que, pour toute perturbation y vérifiant $\| y \| \leq \delta$, on ait*
1) Il existe $\tilde{\sigma} \in \partial f(x_0)$, $\lambda \in I\!R^m$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I(x_0)$ et une sous matrice A_L de A, tels que

$$rgA_L = rgA, \; A_L^T \lambda = \tilde{\sigma}, \; (\lambda, A_L x_0) = 0, \; Dv(0,y) = (\tilde{\sigma}, A_L^\sharp y).$$

2) L'alternative suivante :
Soit $\sum(f,y) \neq \emptyset$, dans ce cas :

$$\| x(y) - x_0 \|_p \leq \left(\frac{R}{\rho} (1 + \sup_{\sigma \in \sum(f,y)} \frac{\| \sigma - \tilde{\sigma} \|_{p*}^p}{\| (I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma}) \|_{p*}^p}) \right)^{\frac{1}{p}} \| A_L^\sharp \|_p \| y \|_p .$$

Soit $\sum(f,y) = \emptyset$, dans ce cas :

$$\| x(y) - x_0 \|_p \leq \left(\frac{R}{\rho} \right)^{\frac{1}{p}} \| A_L^\sharp \|_p \| y \|_p .$$

Preuve. Même démonstration que celle du théorème 2.2.2 avec $p = q$.

Chapitre 3

Stabilité directionnelle dans un espace de Hilbert

3.1 introduction

Après avoir étudié la dépendance de type Lipschitz de la solution optimale d'un problème convexe élémentaire en dimension finie sous les deux hypothèses de la convexité forte et de la croissance quadratique supérieure [20], nous démontrons le résultat de dépendance dans un espace de Hilbert en utilisant les mêmes techniques qu'en dimension finie. Par la suite, nous donnons un exemple illustratif dans le cas hilbertien. Il s'agit du problème de P.P. Mossolov et V.P. Miasnikov [13, 28] en dimension un sur l'espace $H^1(]0,1[)$.
On se place dans le cadre fonctionnel du problème (1.1) et on fait les hypothèses suivantes :
$\mathcal{H}\mathbf{1}$: (Condition de croissance super-quadratique)

$$\exists \rho > 0 \text{ tel que } \forall x \in X,\ f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0, x - x_0) + \frac{\rho}{2}|x - x_0|^2.$$

$\mathcal{H}\mathbf{2}$: (Condition de croissance sub-quadratique)

$$\exists R > 0 \text{ tel que } \forall x \in X,\ f(x) \leq f(x_0) + Df(x_0, x - x_0) + \frac{R}{2}|x - x_0|^2,$$

avec : $Df(x_0, h) = \lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{1}{t}(f(x_0 + th) - f(x_0))$ et x_0 est une solution optimale du problème (1.1) associée à $y = y_0$.
On note $A^\sharp = A^*(AA^*)^{-1}$ le pseudo-inverse de A.
Puisque x_0 est optimal, une condition nécessaire et suffisante d'optimalité du pre-

mier ordre est donnée par :

$$\partial f(x_0) \cap A^*(Y) \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

Pour $h \in W$, on note :

$$\sum(f,h) = \{\sigma \in \partial f(x_0), (\sigma, A^\sharp h) > Dv(y_0,h)\}.$$

On note sgn la fonction définie de $I\!R$ dans $\{-1,0,1\}$ par :

$$sgnx = 1 \text{ si } x > 0,\ sgnx = -1 \text{ si } x < 0 \text{ et } sgn0 = 0.$$

3.2 Stabilité dans le cas différentiable

Contrairement à la dimension finie, l'étude de stabilité en dimension infinie se heurte à plusieurs problèmes, en particulier ceux qui sont liés à la compacité de la boule unité et à la géométrie du cône qui définit les contraintes. Un problème non linéaire de programmation mathématique à contraintes cône peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{P(y)} \quad \begin{cases} \min f(x,y), \\ g(x,y) \in K, \end{cases}$$

où K est un cône convexe fermé et y un paramètre. On suppose que x_0 est une solution associée à y_0.
Le problème en dimension infinie ne peut pas être étendu directement à partir du problème analogue en dimension finie. En plus des problèmes qu'on a cité avant, signalons que l'indépendance des gradients des contraintes actives (IGC) et les conditions suffisantes d'optimalité du second ordre (CSO) sont stables pour les petites perturbations en dimension finie, ces propriétés jouent un rôle essentiel dans l'analyse de sensibilité ce qui n'est pas le cas en dimension infinie. Malanowski [26] a prouvé que si (IGC)[1] et (CSO) sont stables pour de petites perturbations alors $x(y)$ est lipschitzienne. De plus, si le cône des contraintes est polyhédrique, alors la solution optimale est directionnellement différentiable et cette dérivée est bien caractérisée, voir [27].

1. (IGC) en dimension infinie est connue sous le noms de la condition de régularité de Robinson

3.3 Résultats du second ordre

Définition 3.3.1 *$f : X \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ est dite sous linéaire si f est convexe et positivement homogène, autrement dit*

$$f \text{ est convexe et } f(tx) = tf(x),\ \forall x \in X,\ \forall t > 0.$$

Remarque 3.3.1 *Si f est sous linéaire alors*

$$f^* = \chi_{\partial f(0)}.$$

On considère la fonction particulière : $g(x) = w(x) + \dfrac{k}{2}|x|^2$, où $w(.)$ est une fonction sous linéaire continue, avec $\partial w(0) = B$. En utilisant (1.8), (1.9) et la remarque 3.3.1, la fonction polaire de g est donnée par :

$$g^*(p) = \frac{1}{2k}\inf\{|p-q|^2 \,/\, q \in B\}.$$

Nous nous intéressons à l'expression :

$$(g^* \circ A^*)^*(y) \text{ pour } y \in Y.$$

Lemme 3.3.1 *Pour tout $\sigma_0 \in B \cap A^*(Y)$, on a :*

$$(g^*\circ A^*)^*(y) = (\sigma_0, A^\sharp y) + \frac{k}{2}|A^\sharp y|^2 + \sup\Big\{(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y) + \frac{1}{2k}|(1_X - A^\sharp A)(\sigma-\sigma_0)|^2 \,,\ \sigma \in B\Big\}.$$

Démonstration. Par définition :

$$(g^* \circ A^*)^*(y) = \sup\Big\{(\pi, y) - (g^* \circ A^*)(\pi) \,,\ \pi \in Y\Big\}.$$

Puisque $\inf = (-)\sup(-)$ et $AA^\sharp = 1_Y$, alors

$$\begin{aligned}
(g^* \circ A^*)^*(y) &= \sup\Big\{(\pi, y) - \frac{1}{2k}|A^*\pi - \sigma|^2 \,,\ \sigma \in B \,,\ \pi \in Y\Big\} \\
&= \sup\Big\{(\sigma, A^\sharp y) + \sup\{(A^*\pi - \sigma, A^\sharp y) - \frac{1}{2k}|A^*\pi - \sigma|^2 \,,\ \pi \in Y\} \,,\ \sigma \in B\Big\} \\
&= \sup\Big\{(\sigma, A^\sharp y) + \frac{k}{2}|A^\sharp y|^2 + \sup\{|A^\sharp \pi - \sigma - kA^\sharp y|^2 \,,\ \pi \in Y\} \,,\ \sigma \in B\Big\},
\end{aligned}$$

car : $|A^*\pi - \sigma - kA^\sharp y|^2 = |A^*\pi - \sigma|^2 + k^2|A^\sharp y|^2 - 2k(A^*\pi - \sigma, A^\sharp y)$.
Comme $A^\sharp y \in A^*(Y)$, les applications $\pi \longrightarrow A^*\pi - kA^\sharp y$ et $\pi \longrightarrow A^*\pi$ ont même

image et donc

$$(g^* \circ A^*)^* = \sup \Big\{ (\sigma, A^\sharp y) + \frac{k}{2}|A^\sharp y|^2 + \sup\{-\frac{1}{2k}|A^*\pi - \sigma|^2 \,,\, \pi \in Y\} \,,\, \sigma \in B \Big\},$$

le deuxième sup de la formule précédente est atteint pour $\pi = (AA^*)^{-1}A\sigma$, donc

$$(g^* \circ A^*)^*(y) = \sup \Big\{ (\sigma, A^\sharp y) + \frac{k}{2}|A^\sharp y|^2 - \frac{1}{2k}|(1_X - A^\sharp A)\sigma|^2 \,,\, \sigma \in B \Big\}.$$

Choisissons $\sigma_0 \in B \cap A^*(Y)$ (on suppose qu'un tel sous-gradient existe), tel que $A^\sharp A \sigma_0 = \sigma_0$.
Par conséquent

$$(g^* \circ A^*)^*(y) = (\sigma_0, A^\sharp y) + \frac{k}{2}|A^\sharp y|^2 + \sup \Big\{ (\sigma - \sigma_0, A^\sharp y) - \frac{1}{2k}|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2 \,,\, \sigma \in B \Big\},$$

le lemme 3.3.1 est donc démontré.

Lemme 3.3.2 *Supposons que $B \cap A^*(Y) \neq \emptyset$, alors, on a l'alternative suivante*

i) Soit $\sigma \in B, (\sigma, A^\sharp y) > D(g^* \circ A^*)^*(0, y)$, dans ce cas :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{2}{t^2}\Big((g^* \circ A^*)^*(ty) - (g^* \circ A^*)^*(0) - tD(g^* \circ A^*)^*(0, y) \Big) =$$

$$= k\Big(|A^\sharp y|^2 + \sup \Big\{ \frac{[(\sigma, A^\sharp y) - D(g^* \circ A^*)^*(0, y)]^2}{|(1_X - A^\sharp A)\sigma|^2} \,,\, \sigma \in B \,,\, (\sigma, A^\sharp y) > D(g^* \circ A^*)^*(0, y) \Big\} \Big).$$

ii) Soit $\sigma \in B, (\sigma, A^\sharp y) \leq D(g^* \circ A^*)^*(0, y)$, dans ce cas :

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{2}{t^2}\Big((g^* \circ A^*)^*(ty) - (g^* \circ A^*)^*(0) - tD(g^* \circ A^*)^*(0, y) \Big) = k|A^\sharp y|^2.$$

Démonstration. On déduit le ii) en appliquant le lemme 3.3.1.
Démontrons maintenant le i).
Comme $B = \partial w(0) = \partial g(0)$ alors $\partial g(0) \cap A^*(Y) \neq \emptyset$, 0 est un optimum du problème

$$\min g(x) \text{ sous la contrainte } Ax = y \text{ (perturbation } y = 0).$$

La fonction valeur du problème précédent est $(g^* \circ A^*)^*$ et sa dérivée directionnelle est donnée par :

$$\begin{aligned} D(g^* \circ A^*)^*(0, y) &= \max\{(\xi, y) \,/\, A^*\xi \in \partial g(0)\} \\ &= \max\{(\sigma, A^\sharp y) \,/\, \sigma \in B \cap A^*(Y)\}. \end{aligned}$$

On a pour tout $\sigma_0 \in B \cap A^*(X)$ tel que $(\sigma_0, A^\sharp y) = D(g^* \circ A^*)^*(0,y)$:

$$(g^* \circ A^*)^*(ty) - (g^* \circ A^*)^*(0) - tD(g^* \circ A^*)^*(0,y) =$$

$$\frac{k}{2}t^2|A^\sharp y|^2 + \sup\Big\{t(\sigma - \sigma_0, A^\sharp y) - \frac{1}{2k}|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2\,,\ \sigma \in B\Big\}.$$

Considérons l'expression :

$$\sup\Big\{st(\sigma - \sigma_0, A^\sharp y) - \frac{1}{2k}s^2|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2\,,\ s \geq 0\Big\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } (\sigma - \sigma_0, A^\sharp y) \leq 0, \\ \dfrac{k}{2}\dfrac{t^2|(\sigma - \sigma_0, A^\sharp y)|^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

0 est atteint pour $s = 0$ et le second terme est atteint pour

$$s = \frac{kt|(\sigma - \sigma_0, A^\sharp y)|}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2}.$$

Il est clair que

$$\frac{2}{t^2}\Big((g^* \circ A^*)^*(ty) - (g^* \circ A^*)^*(0) - tD(g^* \circ A^*)^*(0,y)\Big) \leq$$

$$k\Big(|A^\sharp y|^2 + \sup_\sigma \frac{|(\sigma - \sigma_0, A^\sharp y)|^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2}\Big),$$

où le sup est sur les σ dans le sous-ensemble

$$\Lambda(y) = \Big\{\sigma \in B\,,\ (\sigma, A^\sharp y)\ >\ D(g^* \circ A^*)^*(0,y)\Big\}.$$

En prenant la lim sup, on obtient

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{2}{t^2}\Big((g^* \circ A^*)^*(ty) - (g^* \circ A^*)^*(0) - tD(g^* \circ A^*)^*(0,y)\Big) \leq$$

$$k\Big(|A^\sharp y|^2 + \sup_{\sigma \in \Lambda(y)} \frac{|(\sigma - \sigma_0, A^\sharp y)|^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2}\Big).$$

Soit $\eta > 0$ et $\sigma \in \Lambda(y)$ tel que :

$$\frac{|(\sigma - \sigma_0, A^\sharp y)|^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2} \geq \sup_{\sigma \in \Lambda(y)} \frac{|(\sigma - \sigma_0, A^\sharp y)|^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2} - \eta.$$

Pour $t \leq \dfrac{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma-\sigma_0)|^2}{k(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y)}$, on a

$$0 \leq s = \frac{kt(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y)}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma-\sigma_0)|^2} \leq 1,$$

donc $\sigma_0 + s(\sigma-\sigma_0) \in B$ car B convexe et alors

$$(g^* \circ A^*)^*(ty) - (g^* \circ A^*)^*(0) - tD(g^* \circ A^*)^*(0,y) \geq$$

$$\frac{k}{2}t^2|A^\sharp y|^2 + ts(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y) - \frac{1}{2k}s^2|(1_X - A^\sharp A)(\sigma-\sigma_0)|^2.$$

Par conséquent :

$$(g^* \circ A^*)^*(ty) - (g^* \circ A^*)^*(0) - tD(g^* \circ A^*)^*(0,y) \geq$$

$$\frac{k}{2}t^2|A^\sharp y|^2 + t\frac{kt(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y)}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma-\sigma_0)|^2}(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y) - \frac{1}{2k}\frac{k^2t^2(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y)^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma-\sigma_0)|^2} =$$

$$= k\frac{t^2}{2}|A^\sharp y|^2 + k\frac{t^2}{2}\frac{(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y)^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma-\sigma_0)|^2} \geq$$

$$\frac{t^2}{2}k\Big(|A^\sharp y|^2 + \sup_{\sigma\in\Lambda(y)} \frac{(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y)^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma-\sigma_0)|^2} - \eta\Big).$$

En prenant la lim inf, on obtient

$$\liminf_{t\searrow 0} \frac{2}{t^2}\Big((g^* \circ A^*)^*(ty) - (g^* \circ A^*)^*(0) - tD(g^* \circ A^*)^*(0,y)\Big) \geq$$

$$k\Big(|A^\sharp y|^2 + \sup_{\sigma\in\Lambda(y)} \frac{(\sigma-\sigma_0, A^\sharp y)^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma-\sigma_0)|^2} - \eta\Big),$$

ceci pour tout $\eta > 0$.
Par conséquent :

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{2}{t^2}\Big((g^* \circ A^*)^*(ty) - (g^* \circ A^*)^*(0) - tD(g^* \circ A^*)^*(0,y)\Big) =$$

$$= k\Big\{|A^\sharp y|^2 + \sup_{\sigma\in\Lambda(y)}\{\frac{[(\sigma, A^\sharp y) - D(g^* \circ A^*)^*(0,y)]^2}{|(1_X - A^\sharp A)\sigma|^2}\}\Big\}.$$

Le lemme 3.3.2 est donc démontré.

3.4 Stabilité

Dans cette partie, on donne un résultat de stabilité de type Lipschitz de la solution optimale du problème (1.1).
On note $x_0 = x(y_0)$ et $x(y)$ la solution optimale associée à y.

Théorème 3.4.1 *Supposons que les hypothèses $\mathcal{H}\mathbf{1}$ et $\mathcal{H}\mathbf{2}$ soient satisfaites pour $x_0 = x(0)$ et que A soit surjectif, alors, on a l'alternative suivante :*

i) $\sum(f,y) \neq \emptyset$, *dans ce cas :*

$$\rho\Big\{|A^\sharp y|^2 + \sup_{\sigma\in\sum(f,y)}\{\frac{[(\sigma, A^\sharp y) - Dv(0,y)]^2}{|(1_X - A^\sharp A)\sigma|^2}\}\Big\} \leq$$
$$\lim_{t\searrow 0}\frac{2}{t^2}\Big(v(ty) - v(0) - tDv(0,y)\Big) \leq$$
$$R\Big\{|A^\sharp y|^2 + \sup_{\sigma\in\sum(f,y)}\{\frac{[(\sigma, A^\sharp y) - Dv(0,y)]^2}{|(1_X - A^\sharp A)\sigma|^2}\}\Big\}.$$

ii) $\sum(f,y) = \emptyset$, *dans ce cas :*

$$\rho|A^\sharp y|^2 \leq \lim_{t\searrow 0}\frac{2}{t^2}\Big(v(ty) - v(0) - tDv(0,y)\Big) \leq R|A^\sharp y|^2.$$

Démonstration. D'après les hypothèses $\mathcal{H}\mathbf{1}$ et $\mathcal{H}\mathbf{2}$

$$g_1(x) = Df(x_0,x) + \frac{R}{2}|x|^2 \geq f(x+x_0) - f(x_0) \geq g_2(x) = Df(x_0,x) + \frac{\rho}{2}|x|^2.$$

Posons $F(x) = f(x+x_0) - f(x_0)$.

$$\begin{array}{rcl} F^*(p) & = & \sup\{(p,x) - f(x+x_0) + f(x_0),\ x\in X\} \\ & = & \sup\{(p,x+x_0) - f(x+x_0) - (p,x_0) + f(x_0),\ x\in X\} \\ & = & f^*(p) - (p,x_0) + f(x_0), \end{array}$$

donc $F^* = f^* - (.,x_0) + f(x_0)$.
De même

$$\begin{array}{rcl} (F^*\circ A^*)^*(y) & = & \sup\{(p,y) - (F^*\circ A^*)(p),\ p\in Y\} \\ & = & \sup\{(p,y) - (f^*\circ A^*)(p) + (A^*p,x_0) - f(x_0),\ p\in Y\} \\ & = & \sup\{(p,y) - (f^*\circ A^*)(p) + (p,Ax_0) - f(x_0),\ p\in Y\}, \end{array}$$

or $Ax_0 = 0$ et $f(x_0) = v(0)$, donc

$$(F^*\circ A^*)^* = (f^*\circ A^*)^* - v(0).$$

Montrons maintenant que

$$\partial g_1(0) = \partial g_2(0) = \partial f(x_0), \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
\gamma \in \partial g_1(0) &\iff g_1(x) \geq g_1(0) + (\gamma, x),\ \forall x \in X \\
&\iff Df(x_0, x) + \frac{R}{2}|x|^2 \geq g_1(0) + (\gamma, x),\ \forall x \in X,
\end{aligned}$$

on remplace x par $\frac{\rho}{R}x$ ($\frac{\rho}{R} > 0$), on obtient

$$\begin{aligned}
\gamma \in \partial g_1(0) &\iff \frac{\rho}{R}Df(x_0, x) + \frac{\rho^2}{2R}|x|^2 \geq g_1(0) + \frac{\rho}{R}(\gamma, x),\ \forall x \in X \\
&\iff Df(x_0, x) + \frac{\rho}{2}|x|^2 \geq g_2(0) + (\gamma, x),\ \forall x \in X \\
&\iff \gamma \in \partial g_2(0),
\end{aligned}$$

donc $\partial g_1(0) = \partial g_2(0)$ et comme $\partial g_2(0) \subset \partial f(x_0) \subset \partial g_1(0)$, on déduit facilement (3.2), par conséquent

$$Dv(0, y) = D(g_1^* \circ A^*)^*(0, y) = D(g_2^* \circ A^*)^*(0, y).$$

Le théorème 3.4.1 est une conséquence du lemme 3.3.2. □

En dimension finie, la continuité lipschitzienne de la solution optimale avec des petites perturbations a été étudiée par Aubin [1] dans le cas convexe, des résultats analogues sont obtenus par Vial et Cornet [10]. Les propriétés hölderiennes et lipschitziennes de la solution optimale avec des perturbations directionnelles et la dérivée de la fontion valeur ont été traitées dans [19, 15, 22], le théorème suivant donne un résultat de stabilité de type Lipschitz de la solution optimale d'un problème à contraintes égalité dans le cas hilbertien.

Théorème 3.4.2 *Supposons que les hypothèses $\mathcal{H}\mathbf{1}$ et $\mathcal{H}\mathbf{2}$ soient satisfaites pour $x_0 = x(y_0)$ et que A soit surjectif, alors on a l'alternative suivante :*

i) $\sum(f, h) \neq \emptyset$, *dans ce cas :*

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{|x(y_0 + th) - x(y_0)|}{t} \leq$$

$$\sqrt{\frac{R}{\rho}\left(1 + \sup_{\sigma \in \sum(f,h)} \frac{|\sigma - \sigma_0|^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2}\right)} \parallel A^\sharp \parallel |h|$$

où σ_0 est un sous gradient de f en x_0 tel que : $(\sigma_0, A^\sharp h) = Dv(y_0, h)$.

ii) $\sum(f, h) = \emptyset$, *dans ce cas :*

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{|x(y_0 + th) - x(y_0)|}{t} \leq \sqrt{\frac{R}{\rho}} \parallel A^\sharp \parallel |h|.$$

Démonstration. D'après l'hypothèse $\mathcal{H}\mathbf{1}$
$\exists\, \rho > 0$ tel que $\forall\, x \in X\,, f(x) - f(x_0) \geq Df(x_0, x - x_0) + \dfrac{\rho}{2}|x - x_0|^2$.
Pour $x = x(y_0 + th)$ on a

$$\frac{\rho}{2}|x(y_0 + th) - x_0|^2 \leq f(x(y_0 + th)) - f(x_0) - Df(x_0, x(y_0 + th) - x_0).$$

Soit $\xi \in \partial f(x_0)$ donc $f(x) \geq f(x_0) + (\xi, x(y_0 + th) - x_0),\ \forall x \in X$.
Comme

$$Df(x_0, x(y_0 + th) - x_0) = \max_{\xi \in \partial f(x_0)} (\xi, x(y_0 + th) - x_0),$$

$\dfrac{\rho}{2}|x(y_0 + th) - x_0|^2 \leq f(x(y_0 + th)) - f(x_0) - (\xi, x(y_0 + th) - x_0)$,
d'après le lemme 1.1.1, on choisit les $\xi \in \partial f(x_0)$ tel que $\xi = A^*\lambda$ avec $\lambda \in \partial v(y_0)$, donc

$$\frac{\rho}{2}|x(y_0 + th) - x_0|^2 \leq v(y_0 + th) - v(y_0) - (A^*\lambda, x(y_0 + th) - x_0).$$

On fait le changement : $V(y) = v(y + y_0)$, par conséquent

$$\frac{\rho}{2}|x(y_0 + th) - x_0|^2 \leq V(th) - V(0) - (\lambda, Ax(y_0 + th) - Ax_0)$$

où encore pour $t > 0$

$$\frac{\rho}{2}\frac{|x(y_0 + th) - x_0|^2}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}\Big(V(th) - V(0) - t(\lambda, h)\Big).$$

On sait que : $DV(0, h) = Dv(y_0, h) = \displaystyle\max_{\sigma \in \partial v(y_0)} (\sigma, h)$, donc

$$\frac{\rho}{2}\frac{|x(y_0 + th) - x_0|^2}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}\Big(V(th) - V(0) - tDV(0, h)).$$

En appliquant le théorème 3.4.1, on obtient
dans le cas i)

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t^2}\Big(V(th) - V(0) - tDV(0, h)\Big) \leq$$

$$\frac{R}{2}\Big\{|A^\sharp h|^2 + \sup\{\frac{[(\sigma, A^\sharp h) - DV(0, h)]^2}{|(1_X - A^\sharp A)\sigma|^2} : \sigma \in \partial f(x_0)\,, (\sigma, A^\sharp h) > DV(0, h)\}\Big\},$$

dans le cas ii)

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t^2}\Big(V(th) - V(0) - tDV(0, h)\Big) \leq \frac{R}{2}|A^\sharp h|^2.$$

En choisissant un $\sigma_0 \in \partial f(x_0)$ tel que $(\sigma_0, A^\sharp h) = DV(0,h) = Dv(y_0,h)$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on achève la démonstration.

3.5 Application au problème de Mossolov

On considère dans cette partie le problème de Mossolov :

$$\text{Minimiser } J(v) = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 |v'(x)|^2 dx + \beta \int_0^1 |v'(x)|dx - \int_0^1 F(x)v(x)dx, v \in H^1,$$

$$\text{sous la contrainte : } Av = (v(0), v(1)) = \theta \in I\!R^2,$$

où α et β sont deux constantes strictement positives et $F \in L^2(]0,1[)$.
On munit H^1 du produit scalaire : $((u,v)) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx$ et L^2 du produit scalaire usuel $(.,.)$, on notera $||.||$ et $|.|$ les normes associées respectivement aux produits scalaires $((.,.))$ et $(.,.)$.

En dimension deux, les trajectoires des particules dans un milieu visqueux plastique sont rectilignes au niveau de la pipe et leurs vélocité (vitesse) $v(x,y)$ est parallèle aux axes de la pipe. Mossolov et Miasnikov [28] ont étudié l'existence et l'unicité des solutions du problème avec des conditions nulles au bord. Ekeland et Temam [13] se sont interéssés au primal et au dual du problème. Dans notre étude [16], nous traiterons la stabilité de la solution optimale du problème de Mossolov en dimension un.

La fonction valeur du problème de Mossolov, notée $\mathcal{V}$ est définie de $I\!R^2$ dans H^1 par :

$$\mathcal{V}(\theta) = \inf\{J(u)/Au = (u(0), u(1)) = \theta\}.$$

On suppose que u_0 est une solution du problème de Mossolov associée à la valeur θ_0 et on note :

$$L_\beta^\infty(u_0) = \Big\{ v \in L^\infty / |v(t)| \leq \beta \, p.p \; sur \; \{u_0' = 0\} \; et$$
$$v(t) = \beta sgn u_0'(t) \, p.p \; sur \; \{u_0' \neq 0\} \Big\}.$$

On considère la fonction Φ définie de L^2 dans $I\!R$ par : $\Phi(u) = \beta \int_0^1 |u(x)|dx$ et la fonction Φ_1 définie de H^1 dans $I\!R$ par : $\Phi_1(u) = \beta \int_0^1 |u'(x)|dx$.

3.5.1 Fonction de Green

Considérons le système

$$\begin{cases} Lx + \lambda h(t)x = f \text{ sur }]a,b[, \\ U_1(x) = A, \\ U_2(x) = B, \end{cases} \tag{3.3}$$

où

$$L = \frac{d}{dt}\{k(t)\frac{d}{dt}\} - g(t),$$

les fonctions k, g, h sont dans $L^\infty(]a,b[)$. U_1 et U_2 désignent deux formes linéaires homogènes en $x(a)$, $x'(a)$, $x(b)$ et $x'(b)$.
Nous supposons que λ n'est pas égale à une valeur propre du système homogène.

Définition 3.5.1 *La fonction de Green associée au problème (3.3) est toute fonction $G(t,\tau)$, $a < \tau < b$ possédant les propriétés suivantes :*

$\bullet$*$G(t,\tau)$ est continue par rapport à t dans (a,b).*

$\bullet\bullet$ *$G(.,\tau)$ est dérivable et sa dérivée est continue dans $\{t \in (a,b), t \neq \tau\}$ et au point τ, $\frac{\partial}{\partial t}G(.,\tau)$ présente un saut :*

$$\frac{1}{k(\tau)} = \frac{\partial}{\partial t}G(\tau_+,\tau) - \frac{\partial}{\partial t}G(\tau_-,\tau).$$

$\bullet\bullet\bullet$*$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(.,\tau)$ existe sauf au point $t = \tau$ et la fonction $G(.,\tau)$ satisfait formellement (au sens des distributions) au système homogène associé à (3.3).*

3.5.2 Existence et unicité dans le cas de dimension un

Théorème 3.5.1 *(Théorème d'existence et d'unicité)*
Le système homogène associé à (3.3) admet une fonction de Green et une seule.

Preuve. Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions linéairement indépendantes de $Lx + \lambda h(t)x = 0$, comme $G(.,\tau)$ est une solution de cette équation dans $]a,\tau[$ et $]\tau,b[$, alors, on a :
$G(t,\tau) = A_1x_1(t) + A_2x_2(t)$ pour $a < t < \tau$,
$G(t,\tau) = B_1x_1(t) + B_2x_2(t)$ pour $\tau < t < b$.

• et •• donnent :

$$\begin{cases} (A_1 - B_1)x_1(\tau) + (A_2 - B_2)x_2(\tau) = 0, \\ (A_1 - B_1)x_1'(\tau) + (A_2 - B_2)x_2'(\tau) = \dfrac{-1}{k(\tau)}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Comme $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont linéairement indépendantes, $x_1(\tau)x_2'(\tau) - x_2(\tau)x'(\tau) \neq 0$, donc le système (3.4) admet une solution unique :

$$\begin{cases} (A_1 - B_1) = C_1, \\ (A_2 - B_2) = C_2. \end{cases} \tag{3.5}$$

En faisant intervenir les conditions aux limites, on peut écrire alors U_1 et U_2 sous la forme

$$\begin{cases} U_1(x) = v_1(x) + w_1(x), \\ U_2(x) = v_2(x) + w_2(x), \end{cases} \tag{3.6}$$

avec :

$$\begin{cases} v_i(x) = \alpha_i x(a) + \beta_i x'(a), \\ w_i(x) = \gamma_i x(b) + \delta_i x'(b), \\ i = 1, 2. \end{cases} \tag{3.7}$$

$G(t,\tau)$ satisfait aux conditions aux limites $U_i(G) = v_i(G) + w_i(G)$, $i = 1, 2$, où v_i et w_i étant linéaires :

$$A_1 v_i(x_1) + A_2 w_i(x_2) + B_1 w_i(x_1) + B_2 w_i(x_2) = 0, \ \ i = 1, 2.$$

En remplaçant B_i par $A_i - C_i$ $(i = 1, 2)$, on obtient :

$$\begin{cases} A_1(v_1(x_1) + w_1(x_1)) + A_2(v_1(x_2) + w_1(x_2)) = C_1 w_1(x_1) + C_2 w_1(x_2), \\ A_1(v_2(x_1) + w_2(x_1)) + A_2(v_2(x_2) + w_2(x_2)) = C_1 w_2(x_1) + C_2 w_2(x_2). \end{cases} \tag{3.8}$$

Si on remplace les seconds membres de (3.8) par 0, les équations expriment que la fonction $A_1x_1 + A_2x_2$ satisfait les conditions aux limites $U_1(x) = U_2(x) = 0$. Comme nous avons supposé que λ n'est pas une valeur propre du système homogène, on ne peut donc trouver aucun couple de nombres A_1, A_2 non tous nuls tels que les équations homogènes en A_1, A_2 déduites de (3.8) soient vérifiées, en d'autres termes, le système (3.8) est de Cramer, donc (3.8) admet une solution unique en A_1, A_2, ceci démontre l'existence et l'unicité de la fonction de Green de (3.3). □

Prenons maintenant l'équation non homogène

$$\begin{cases} Lx + \lambda h(t)x = f \text{ sur }]a, b[, \\ U_1(x) = 0, \\ U_2(x) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Théorème 3.5.2 *La solution générale de (3.9) est sous la forme :*

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{3.10}$$

Preuve. On a

$$\frac{dx}{dt}(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Pour calculer $\dfrac{d^2x}{dt^2}$, on doit tenir compte de la discontinuité de $\frac{\partial}{\partial t}G(.,\tau)$ au point $t=\tau$. En écrivant :

$$\frac{dx}{dt}(t) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)f(\tau)d\tau + \int_t^b \frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{3.11}$$

Les deux intégrales sont continues dans les deux intervalles d'intégration, on peut donc appliquer la formule classique de dérivation sous le signe somme.
Posons

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau) = \begin{cases} g_1(t,\tau) & \text{si } a \leq t < \tau, \\ g_2(t,\tau) & \text{si } \tau < t \leq b. \end{cases}$$

g_1 et g_2 sont continues, multiplions (3.11) par $k(t)$ et dérivons sous le signe somme, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\{k(t)\frac{dx}{dt}(t)\} = \int_a^b \frac{d}{dt}\{k(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,\tau)\}f(\tau)d\tau + k(t)f(t)(g_2(t,t)-g_1(t,t)). \tag{3.12}$$

D'après • • •, on en déduit $Lx + \lambda h(t)x = f(t)$.
D'autre part $G(t,\tau)$ satisfait aux conditions aux limites homogènes, il en est de même pour $\displaystyle\int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau$, la fonction définie donc par (3.10) est la solution du système (3.9). □

Soient $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ les solutions respectives de :

$$\begin{cases} Lx + \lambda h(t)x = f \text{ sur }]a,b[, \\ U_1(x) = 1, \\ U_2(x) = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

et

$$\begin{cases} Lx + \lambda h(t)x = f \text{ sur }]a,b[, \\ U_1(x) = 0, \\ U_2(x) = 1. \end{cases} \tag{3.14}$$

Théorème 3.5.3 *La solution de (3.3) est donnée par*

$$x(t) = A\xi_1(t) + B\xi_2(t) + \int_a^b G(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $L\xi_i + \lambda h(t)\xi_i = 0$ pour $i = 1, 2$ et que $U_1(\xi_2) = U_2(\xi_1) = 0$.

3.5.3 Etude de stabilité par rapport aux conditions aux limites du problème de Mossolov

Lemme 3.5.1 *Le sous-différentiel de Φ en $w \in L^2$ est donné par:*

$$\partial\Phi(w) = \Big\{ v \in L^\infty \,/\, |v(x)| \leq \beta \; p.p \; sur \; \{w = 0\} \; et$$

$$v(x) = \beta sgnw(x) \; p.p \; sur \; \{w \neq 0\} \Big\}.$$

Démonstration. Par définition, la fonction polaire de Φ est donnée par:

$$\begin{aligned} \Phi^*(v) &= \sup\{(u, v) - \Phi(u)/u \in L^2\} \\ &= \sup\{\int_0^1 [v(x)u(x) - \beta|u(x)|]dx/u \in L^2\}. \end{aligned}$$

Donc:

$$\Phi^*(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } |v(x)| \leq \beta \; p.p. \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\Phi(w)$ et (v, w) sont finis, et $\Phi^*(v) + \Phi(w) = (v, w)$ alors
$\Phi^*(v) < \infty \Longrightarrow \Phi^*(v) = 0 \Longrightarrow |v(x)| \leq \beta \; p.p.$
Par conséquent: $\partial\Phi(w) = \{v \in L^\infty/\Phi(w) = (v, w) \; et \; |v(x)| \leq \beta \; p.p\}$,
où encore:

$$\partial\Phi(w) = \Big\{ v \in L^\infty / \int_0^1 [\beta|w(x)| - v(x)w(x)]dx = 0 \; et \; |v(x)| \leq \beta \; p.p \Big\}.$$

Or $\beta|w(x)| - v(x)w(x) \geq 0 \; p.p$ car $|v(x)| \leq \beta \; p.p$, donc le lemme 3.5.1 est démontré.

Lemme 3.5.2 *Le sous-différentiel de Φ_1 en u_0 est donné par:*

$$\partial\Phi_1(u_0) = \Big\{ \varphi \in H^1/\varphi(.) = -\frac{ch\,.}{sh\,1}\int_0^1 sh\,(1-y)v(y)dy + \int_0^{.} ch\,(.-y)v(y)dy, v \in L^\infty_\beta(u_0) \Big\}.$$

Démonstration. Φ_1 est la composée de Φ et ∇, ici ∇ désigne l'opérateur dérivée défini de H^1 dans L^2.
Comme Φ est continue au point $\nabla u_0 = u_0'$ et $\Phi(u_0') < \infty$, alors:

$$\partial\Phi_1(u_0) = \nabla^*\partial\Phi(u_0').$$

L'opérateur ∇^* est défini de L^2 dans H^1 par :

$$((\nabla^* w, u)) = (w, \nabla u),\ \forall w \in L^2, \forall u \in H^1. \tag{3.15}$$

(3.15) est équivalente à

$$\int_0^1 \Big((\nabla^* w)'(x)u'(x) + (\nabla^* w)(x)u(x)\Big)dx = \int_0^1 w(x)u'(x)dx, \forall w \in L^2, \forall u \in H^1.$$

Posons $T(x) = \int_0^x (\nabla^* w)(t)dt$ et intégrons par partie :
$\int_0^1 (T''(x) - T(x) - w(x))u'(x)dx + T(1)u(1) = 0.$
Comme u est arbitraire, on en déduit $T(1) = 0$ et T est alors solution du système :

$$\begin{cases} -T'' + T = -w, \\ T(0) = T(1) = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

D'après le théorème 3.5.2, la solution générale de (3.16) est sous la forme :
$T(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)dy$, où $G(x,y)$ est la fonction de Green du système homogène, elle est donnée par

$$G(x,y) = \frac{1}{sh\,1}(sh\,x\,sh\,(1-y)\; - sh\,1\,sh\,(x-y)^+),\ \text{(voir tome 1 [11], p 734)}.$$

Donc $\nabla^* w$ est donnée par : $(\nabla^* w)(x) = -\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)w(y)dy.$
En utilisant le lemme 3.5.1, on obtient le résultat.

Théorème 3.5.4 *Le sous-différentiel de J en $u_0 \in H^1$ est donné par :*
$\partial J(u_0) = \Big\{\varphi \in H^1/\varphi(.) = -\frac{ch\,.}{sh\,1}(F_0(1) + \int_0^1 sh\,(1-y)(w(y) + \alpha u_0'(y) + F_0(y))dy) + \int_0^{\cdot} ch\,(.-y)(w(y) + \alpha u_0'(y) + F_0(y))dy\,,\ w \in L^\infty_\beta(u_0)\,et\,F_0(.) = \int_0^{\cdot} F(t)dt\Big\}.$

Démonstration. Considérons la fonction Ψ_1 définie de H^1 dans $I\!R$ par :

$$\Psi_1(u) = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2 dx.$$

Ψ_1 est la composée de Ψ et l'opérateur ∇ défini comme au lemme 3.5.2, avec Ψ définie de L^2 dans $I\!R$ par : $\Psi(u) = \frac{\alpha}{2}|u|^2$.
D'après (1.7) et (1.8), la fonction polaire de Ψ est donnée par

$$\Psi^*(v) = \frac{\alpha}{2}|\frac{v}{\alpha}|^2 = \frac{1}{2\alpha}|v|^2,$$

car $\alpha > 0$, donc

$$\partial\Psi(u) = \{v \in L^2 \,/\, \frac{1}{2\alpha}|v|^2 + \frac{\alpha}{2}|u|^2 = (u,v)\}.$$

$\frac{1}{2\alpha}|v|^2 + \frac{\alpha}{2}|u|^2 = (u,v) \Longleftrightarrow |v|^2 + |\alpha u|^2 - 2\alpha(u,v) = 0 \Longleftrightarrow v = \alpha u.$
D'où :

$$\begin{aligned}\partial\Psi_1(u_0) &= \nabla^*\partial\Psi(u_0') \\ &= \Big\{g \in H^1/g(.) = -\alpha\frac{ch\,.}{sh\,1}\int_0^1 sh\,(1-y)u_0'(y)dy + \alpha\int_0^{.} ch\,(.-y)u_0'(y)dy\Big\}.\end{aligned}$$

Considérons la fonction γ définie de H^1 dans $I\!R$ par : $\gamma(u) = \int_0^1 F(x)u(x)dx$,
γ est linéaire continue, d'après le théorème de représentation de Reisz-Fréchet :

$$\exists v \in H^1 \text{ unique, tel que } ((v,u)) = \gamma(u),\ \forall u \in H^1.$$

En posant $F_0(x) = \int_0^x F(t)dt$, $v_0(x) = \int_0^x v(t)dt$ et en utilisant une intégration par partie, v est alors donnée par

$$v(x) = F_0(1)\frac{ch\,x}{sh\,1} + \frac{ch\,x}{sh\,1}\int_0^1 sh\,(1-y)F_0(y)dy - \int_0^x ch\,(x-y)F_0(y)dy.$$

Comme les applications Φ_1, Ψ_1 et γ sont dans $\Gamma(H^1)$, continues en $u_0 \in H^1$, en utilisant le théorème 1.1.3, on a

$$\partial J(u_0) = \partial\Phi_1(u_0) + \partial\Psi_1(u_0) - \partial\gamma(u_0),$$

le théorème 3.5.4 est alors démontré. □

Dans la suite, on note pour $v \in L^\infty_\beta(u_0)$:
$B_v(x) = \frac{ch\,x}{sh\,1}\Big(\int_0^1 sh\,(1-y)(v(y) + \alpha u_0'(y) + F_0(y))dy\Big) -$

$$\int_0^x ch\,(x-y)(v(y) + \alpha u_0'(y) + F_0(y))dy,\ \forall x \in]0,1[.$$

Lemme 3.5.3 *Le sous-différentiel de la fonction valeur $\mathcal{V}$ en θ_0 est donné par*
$\partial\mathcal{V}(\theta_0) = [-\frac{1}{th\,1}m_2 + \frac{1}{sh\,1}m_3, -\frac{1}{th\,1}m_1 + \frac{1}{sh\,1}m_4]\times$

$$[-F_0(1) + \frac{1}{sh\,1}m_1 - \frac{1}{th\,1}m_4, -F_0(1) + \frac{1}{sh\,1}m_2 - \frac{1}{th\,1}m_3],$$

avec $m_1 = \inf_{v \in L^\infty_\beta(u_0)} B_v(0^+)$, $m_2 = \sup_{v \in L^\infty_\beta(u_0)} B_v(0^+)$, $m_3 = \inf_{v \in L^\infty_\beta(u_0)} B_v(1^-)$, $m_4 = \sup_{v \in L^\infty_\beta(u_0)} B_v(1^-)$.

Démonstration. L'opérateur A^* est défini de $I\!R^2$ dans H^1 par :

$$Au.\eta = ((u, A^*\eta)), \forall \eta \in I\!R^2, \forall u \in H^1,$$

donc : $A^*\eta$ est un élément de H^1 défini par : $(A^*\eta)(x) = \dfrac{ch\,(x-1)}{sh\,1}\eta_1 + \dfrac{ch\,x}{sh\,1}\eta_2$.
D'après le lemme 1.1.1 : $\partial\, \mathcal{V}(\theta_0) = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) \in I\!R^2 / A^*\eta \in \partial J(u_0)\}$.

$A^*\eta \in \partial J(u_0) \Longleftrightarrow \exists g \in \partial J(u_0)$ telle que $A^*\eta(x) = g(x)$, $\forall x \in]0,1[$,
autrement dit
$\exists v \in L^\infty_\beta(u_0)$, telle que $\dfrac{ch\,(x-1)}{sh\,1}\eta_1 + \dfrac{ch\,x}{sh\,1}\eta_2 = -F_0(1)\dfrac{ch\,x}{sh\,1} - B_v(x)$, $\forall x \in]0,1[$.
En donnant à x les valeurs 0^+ et 1^-, on obtient un système d'équations qui a pour solution

$$\begin{cases} \eta_1 = -\frac{1}{th\,1}B_v(0^+) + \frac{1}{sh\,1}B_v(1^-), \\ \eta_2 = -F_0(1) + \frac{1}{sh\,1}B_v(0^+) - \frac{1}{th\,1}B_v(1^-), \end{cases}$$

et la démonstration du lemme 3.5.3 est achevée.

Théorème 3.5.5 *L'assertion suivante est vérifiée :* $\sum(J,\theta) = \emptyset$.

Démonstration. $D\mathcal{V}\ (\theta_0, .)$ est la fonction d'appui sur $\partial\mathcal{V}(\theta_0)$, donc :
$D\mathcal{V}(\theta_0, \theta) = \max\{\xi.\theta / \ \xi \in \partial\mathcal{V}(\theta_0)\}$, $\forall \theta \in I\!R^2$,
$D\mathcal{V}(\theta_0, \theta) =$

$$\begin{cases} (-\frac{1}{th\,1}m_1 + \frac{1}{sh\,1}m_4)\theta_1 + (-F_0(1) + \frac{1}{sh\,1}m_2 - \frac{1}{th\,1}m_3)\theta_2 & si\ \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0 \\ (-\frac{1}{th\,1}m_2 + \frac{1}{sh\,1}m_3)\theta_1 + (-F_0(1) + \frac{1}{sh\,1}m_1 - \frac{1}{th\,1}m_4)\theta_2 & si\ \theta_1 \leq 0, \theta_2 \leq 0 \\ (-\frac{1}{th\,1}m_2 + \frac{1}{sh\,1}m_3)\theta_1 + (-F_0(1) + \frac{1}{sh\,1}m_2 - \frac{1}{th\,1}m_3)\theta_2 & si\ \theta_1 \leq 0, \theta_2 \geq 0 \\ (-\frac{1}{th\,1}m_1 + \frac{1}{sh\,1}m_4)\theta_1 + (-F_0(1) + \frac{1}{sh\,1}m_1 - \frac{1}{th\,1}m_4)\theta_2 & si\ \theta_1 \geq 0, \theta_2 \leq 0 \end{cases}$$

$A^\sharp$ est définie de $I\!R^2$ dans H^1 par : $(A^\sharp\theta)(x) = \dfrac{sh\,(x-1)}{sh\,1}\theta_1 + \dfrac{sh\,x}{sh\,1}\theta_2$, $\forall x \in]0,1[$.
Soit $g \in \partial J(u_0) \Longleftrightarrow \exists v \in L^\infty_\beta(u_0)$, $\ g(x) = -F_0(1)\frac{ch\,x}{sh\,1} - B_v(x)$, $\forall x \in]0,1[$.
$((g, A^\sharp\theta)) = \displaystyle\int_0^1 (A^\sharp\theta)'(x)g'(x)dx + \int_0^1 (A^\sharp\theta)(x)g(x)dx.$
Posons $L(x) = -\dfrac{ch\,(x-1)}{sh\,1}\theta_1 + \dfrac{ch\,x}{sh\,1}\theta_2$ et intégrons par partie, on obtient
$((g, A^\sharp\theta)) = (-\dfrac{1}{th\,1}B_v(0^+) + \dfrac{1}{sh\,1}B_v(1^-))\theta_1 + (-F_0(1) + \dfrac{1}{sh\,1}B_v(0^+) - \dfrac{1}{th\,1}B_v(1^-))\theta_2.$
Donc $((g, A^\sharp\theta)) \leq D\mathcal{V}(\theta_0, \theta)$, $\forall \theta \in I\!R^2$ ce qui donne $\sum(J,\theta) = \emptyset$.

3.6 Stabilité avec une hypothèse plus faible

On change l'hypothèse super-quadratique $\mathcal{H}\mathbf{1}$ par une hypothèse plus faible :
$\mathcal{H}\mathbf{1}'$: (Condition de croissance super-quadratique sur le noyau de A)

$$\exists \rho > 0 \, et \, k > 0 / \; \forall x \in X, \; f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0, x - x_0) + \frac{\rho}{2}|x - x_0|^2 - \frac{k}{2}|Ax - Ax_0|^2.$$

Le résultat de dépendance de type Lipschitz de la solution optimale peut alors se formuler sous la forme suivante :

Théorème 3.6.1 *Supposons que les hypothèses $\mathcal{H}\mathbf{1}'$ et $\mathcal{H}\mathbf{2}$ soient satisfaites pour $x_0 = x(y_0)$ et que A soit surjectif, alors on a l'alternative suivante :*

i) $\sum(f,h) \neq \emptyset$, *dans ce cas :*

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{|x(y_0 + th) - x(y_0)|}{t} \leq$$
$$\sqrt{\frac{R + k||A||^2}{\rho}(1 + \sup_{\sigma \in \sum(f,h)} \frac{|\sigma - \sigma_0|^2}{|(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \sigma_0)|^2})||A^\sharp|||h|},$$

où σ_0 est un sous gradient de f en x_0 tel que : $(\sigma_0, A^\sharp h) = Dv(y_0, h)$.
ii) $\sum(f,h) = \emptyset$, *dans ce cas :*

$$\limsup_{t \searrow 0} \frac{|x(y_0 + th) - x(y_0)|}{t} \leq \sqrt{\frac{R + k||A||^2}{\rho}}||A^\sharp|||h|.$$

Démonstration. On pose $f_k(x) = f(x) + \frac{k}{2}|x|^2$ et on notera v^k la fonction valeur associée au problème

$$\begin{cases} \min f_k(x), \\ Ax = y. \end{cases} \tag{3.17}$$

x_0 est solution du problème (1.1) est équivalent à x_0 solution du problème (3.17).
D'après $\mathcal{H}\mathbf{1}'$ et $\mathcal{H}\mathbf{2}$, on obtient

$$g_1(x) \leq f_k(x + x_0) - f_k(x_0) \leq g_2(x),$$

où $g_1(x) = Df_k(x_0, x) + \frac{\rho}{2}|x||^2$ et $g_2(x) = Df_k(x_0, x) + \frac{R + k||A||^2}{2}|x|^2$.
Puisque $\sum(f_k, y) = \sum(f, y)$, alors, en appliquant le théorème 3.4.1 à la fonction

f_k, on obtient :
Dans le cas où $\sum(f,y) \neq \emptyset$:

$$\rho\Big\{|A^\sharp y|^2 + \sup_{\sigma\in\sum(f,y)}\{\frac{[(\sigma,A^\sharp y)-Dv(0,y)]^2}{|(1_X - A^\sharp A)\sigma|^2}\}\Big\} \leq$$

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{2}{t^2}\Big(v(ty)-v(0)-tDv(0,y)\Big)+k|y|^2 \leq$$

$$(R+k||A||^2)\Big\{|A^\sharp y|^2 + \sup_{\sigma\in\sum(f,y)}\{\frac{[(\sigma,A^\sharp y)-Dv(0,y)]^2}{|(1_X - A^\sharp A)\sigma|^2}\}\Big\}$$

et dans le cas où $\sum(f,y) = \emptyset$:

$$\rho|A^\sharp y|^2 \leq \lim_{t\searrow 0}\frac{2}{t^2}\Big(v(ty)-v(0)-tDv(0,y)\Big)+k||y||^2 \leq (R+k||A||^2)|A^\sharp y|^2,$$

ceci car $v^k(ty) = v(ty) + \dfrac{kt^2}{2}|y|^2$, $v^k(0) = v(0)$, et $Dv^k(0,y) = Dv(0,y)$.
D'après l'hypothèse $\mathcal{H}\mathbf{1}'$
$\exists\,\rho > 0$ et $k > 0$ tels que
$\forall\, x \in X\,,\, f(x) - f(x_0) \geq Df(x_0, x-x_0) + \dfrac{\rho}{2}|x-x_0|^2 - \dfrac{k}{2}|Ax - Ax_0|^2.$
Pour $x = x(y_0+th)$, on a

$$\frac{\rho}{2}|x(y_0{+}th){-}x_0|^2 \leq f(x(y_0{+}th)){-}f(x_0){-}Df(x_0,x(y_0{+}th){-}x_0){+}\frac{kt^2}{2}|Ax(y_0{+}th){-}Ax_0|^2.$$

Soit $\xi \in \partial f(x_0)$ donc $f(x) \geq f(x_0) + (\xi, x(y_0+th)-x_0),\ \forall x \in X$
et comme

$$Df(x_0, x(y_0+th)-x_0) = \max_{\xi\in\partial f(x_0)}(\xi, x(y_0+th)-x_0),$$

$\dfrac{\rho}{2}|x(y_0+th)-x_0|^2 \leq f(x(y_0+th)) - f(x_0) - (\xi, x(y_0+th)-x_0) + \dfrac{kt^2}{2}|h|^2.$
D'après le Lemme 1.1.1, on choisit les $\xi \in \partial f(x_0)$ tel que $\xi = A^*\lambda$ avec $\lambda \in \partial v(y_0)$, donc

$$\frac{\rho}{2}|x(y_0+th)-x_0|^2 \leq v(y_0+th) - v(y_0) - (A^*\lambda, x(y_0+th)-x_0) + \frac{kt^2}{2}|h|^2.$$

On fait le changement : $V(y) = v(y+y_0)$, par conséquent

$$\frac{\rho}{2}|x(y_0+th)-x_0|^2 \leq V(th) - V(0) - (\lambda, Ax(y_0+th)-Ax_0) + \frac{kt^2}{2}|h|^2,$$

où encore pour $t > 0$

$$\frac{\rho}{2}\frac{|x(y_0+th)-x_0|^2}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}(V(th)-V(0)-t(\lambda,h)) + \frac{k}{2}|h|^2.$$

On sait que : $DV(0,h) = Dv(y_0,h) = \max\limits_{\sigma\in\partial v(y_0)}(\sigma,h)$, donc

$$\rho\frac{|x(y_0+th)-x_0|^2}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}(V(th)-V(0)-tDV(0,h)) + k|h|^2.$$

En choisissant un $\sigma_0 \in \partial f(x_0)$ tel que $(\sigma_0, A^\sharp h) = DV(0,h) = Dv(y_0,h)$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on achève la démonstration.

Notations

Soit X et Y deux espaces de Hilbert munis d'un produit scalaire $(.,.)$, K un cône convexe fermé de Y, on note

$|.|$ la norme déduite du produit scalaire $(.,.)$.
X^* l'espace des formes linéaires continues sur X.
$K^+ = \{y \in Y,\ (x,y) \geq 0,\ \forall x \in K\}$ le cône polaire à K.
$\chi_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$
1_X l'opérateur identité de X.
$\Gamma(X)$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $I\!R \cup \{+\infty\}$, partout définies sur X, convexes, semi-continues inférieurement.

Soit A un opérateur linéaire, on note
A^* l'opérateur adjoint de A, on le notera A^T en cas de dimension finie.
ImA l'image de l'opérateur A.
$KerA$ le noyau de l'opérateur A.

$\oplus$ désigne la somme directe de deux sous espaces vectoriels quelconques de X.
Soit Ω un ouvert borné de $I\!R^n$, on note

$L^1 : = L^1(\Omega)$ espace des classes de fonctions intégrables sur Ω, à valeurs dans $I\!R$.
$L^p : = L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow I\!R,\ f\, mesurable\ et\ |f|^p \in L^1\},\ 1 < p < +\infty.$
$L^\infty : = L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow I\!R,\ f\, mesurable\ et\, \exists c > 0\, tel\, que\, |f(x)| \leq c\ p.p\ sur \Omega\}.$
$H^1 : = H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{f \in L^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2,\ \forall 1 \leq i \leq n\}.$

Soit f une fonction de X dans $I\!R$, on note
$Domf$ le domaine effectif de f.

Bibliographie

[1] **Aubin J.P.** Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems, Mathematics of Operations Research, **9,** 1984, 87-111.

[2] **Auslender A., Cominetti R.** First and second order sensitivity analysis of nonlinear programs under directional constraint qualification conditions, Optimization Akademic Verlag, Berlin, 1990.

[3] **Bonnans J.F., Cominetti R.** Perturbed optimization in Banach spaces I: A general theory based on a weak directional contraint qualification. SIAM J. control and optimization, Vol 34, **4**, 1996, 1151-1171.

[4] **Bonnans J.F., Cominetti R.** Perturbed optimization in Banach spaces II: Strong directional contraint qualification. SIAM J. control and optimization, Vol 34, **4**, 1996, 1172-1189.

[5] **Bonnans J.F., Cominetti R.** Perturbed optimization in Banach spaces III: Semi-infinite optimization. SIAM J. control and optimization, Vol 34, **5**, 1996, 1555-1567.

[6] **Bonnans J.F., Cominetti R., Shapiro A.** Sensitivity analysis of optimization problems under second order regular constraints, Rapport de Recherche de L'INRIA, **2989**, 1996.

[7] **Bonnans J.F., Cominetti R., Shapiro A.** Second order necessary and sufficient optimality conditions under abstract constraints, Rapport de Recherche de L'INRIA, **2952**, 1996.

[8] **Bonnans J.F., Ioffe A.I.** Quadratic growth and stability in convex programming with multiple solutions, J. Convex Analysis (à paraître).

[9] **Clarke H.** Optimization and nonsmooth analysis, Canadian Mathematical Society, 1976.

[10] **Cornet B., Vial J.P.** Lipschitzian solutions of perturbed nonlinear programming problems, SIAM J. of Control and Optim., **24**, 1983, 1123-1137.

[11] **Dautray R., Lions J.L.** Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Masson, 1984.

[12] **Fiacco A.V.** Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming Academic Press, 1983.

[13] **Eckeland I., Temam R.** Convex Analysis and variationals problems, Dunod-Gauthier Villars, Paris 1974.

[14] **Gauvin J., Janin R.** Directional behaviour of optimal solutions in nonlinear mathematical programming, Mathematics of Operations Research, **13**, 1988, 629-649.

[15] **Gauvin J., Janin R.** Directional Lipschitzian optimal solutions and directional derivatives for the optimal value function in nonlinear mathematical programming, Analyse non linéaire, H.Attouch et coll. ed, C.R.M. et Gauthier-Villars, Paris 1989, 305-324. **4**, 1977, 615-631.

[16] **Hilout S.** Directional Lipschitzian optimal solution of infinite dimentional optimization problems, 1997, Applied Mathematics letters (à paraître).

[17] **Hiriart-Urruty J.B., Lemaréchal C.** Convex Analysis and Minimization Algorithms, Springer-Verlag 1993 (deux volumes).

[18] **Ioffe A.** On sensitivity analysis of nonlinear programs in Banach spaces: The approch via composite unconstrained optimization, SIAM J. of Optimization, Vol 4, **1**, 1994, 1-43.

[19] **Janin R.** Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming, **21** 1984, 110-126.

[20] **Janin R., Gauvin J.** Lipschitz dependence of the optimal solution to elementary convex programs 1995 (à paraître).

[21] **Janin R., Gauvin J.** Lipschitz stability in nonsmooth convex programs 1997 (à paraître).

[22] **Janin R., Mado J.C., Narayaninsamy J.** Second order multipliers and marginal function in nonlinear programs, Optimization, **22**, 1991, 163-176.

[23] **Laurent P.J.** Approximation et optimisation, 1972, Hermann.

[24] **Lemaréchal C., Sagastizábal C.** More than first-order developements of convex functions: Primal-Dual Relations, Journal of Convex Analysis, Vol 3, **2**, 1996, 81-110.

[25] **Lemaréchal C., Sagastizábal C.** Pratical aspects of the Moreau-Yosida regularization: Theoretical preliminaries, SIAM J. of Optimization, 1995, (à paraître).

[26] **Malanowski K.** Sensitivity analysis of optimization problems in Hilbert space with application to optimal control, Applied Math optimization, **21**, 1990, 1-20.

[27] **Malanowski K.** Second order conditions and constraint qualification in stability and sensitivity of solutions to optimizations problems, Applied Math optimization, **25**, 1992, 51-79.

[28] **Mossolov P.P., Miasnikov V.P.** Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous-plastic medium, PMM, vol.23, No 3, 1965, 468-492.

[29] **Robinson S.M.** Perturbed Kuhn-Tucker points and rates of convergences for a class of nonlinear-programming algorithms, Mathematical Programming, **7**, 1974, 1-16.

[30] **Robinson S.M.** Stability theory for systems of inequalities, Part II : differentiable nonlinear systems, SIAM Journal of Numerical analysis, **13**, 1976, 487-513.

[31] **Rockafellar R.T.** Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.

[32] **Shapiro A.** On Lipschitzian stability of optimal solutions of parametrized semi-infinite programs, Mathematical of Operations Research, Vol 19, **3**, 1994, 743-752.

[33] **Shapiro A., Bonnans J.F.** Sensitivity analysis of parametrized programs under cone constraints, SIAM J. control and optimization, Vol 30, **6**, 1992, 1409-1429.

[34] **Shapiro A., Bonnans J.F.** Optimization problems with perturbations, A guided tour, 1997, à paraître.

[35] **Thibault L.** On subdifferentials of optimal value functions, SIAM Journal of Control and Optimization, **29**, 1991, 1019-1036.