Stabilité en optimisation convexe non différentiable

Saïd HILOUT

L3MA-SP2MI Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Chassneuil cedex, France
E-mail : hilout@l3ma.univ-poitiers.fr

Résumé. Dans cette note, nous étudions la stabilité de la solution optimale par rapport aux perturbations du paramètre d'un problème de programmation mathématique convexe non différentiable. Sous une nouvelle hypothèse de croissance, nous obtenons une majoration du reste du développement à l'ordre deux de la fonction valeur. Le résultat principal est une analyse de stabilité de type Hölder et de type Lipschitz.

Stability analysis of a nonsmooth convex mathematical programming problem

Abstract. *In this note, we study the stability of the optimal solution of a nonsmooth convex program with respect a the parameter. Under a new growth assumption, estimate of the remainder term in the second-order expansion of the value function is established. The main results are Hölder and Lipschitz type stability.*

Abridged English Version

This paper consists of a study of stability in convex programming. Under a new growth condition, we obtain an estimate of the remainder term in the second-order expansion of the value function close to the origin of a parametrized nonsmooth convex program. The consequence is a Hölder and Lipschitz type dependence of the optimal solution when the cone constraints are subject to small perturbations. Let f be some convex function on $X = I\!R^n$ and A be some linear operator from X into $Y = I\!R^m$ and consider the nonsmooth convex mathematical programming

$$\mathbf{P(y)} \qquad \begin{cases} \min f(x), \\ Ax \in y + K, \end{cases}$$

where the vector y represents the parameter and K is the cone in Y defined by equalities and inequalities constraints :

$$K = \{y \in I\!R^m,\, y_i = 0\,(1 \leq i \leq r)\,,\, y_i \geq 0\,(r+1 \leq i \leq m)\}.$$

Let v be the value (or marginal) function of $P(y)$ defined by :

$$v(y) = \inf_{Ax \in y+K} f(x).$$

We assume the following :
H1 : (Underestimation of the growth of degree q hypothesis)
$\exists \rho > 0$, such that, $f(x) \geq f(x_0) + df(x_0, x - x_0) + \frac{\rho}{q}||x - x_0||_q^q,\ \forall x \in B(x_0, \epsilon)$.
H2 : (Overestimation of the growth of degree p hypothesis)
$\exists R > 0$, such that, $f(x) \leq f(x_0) + df(x_0, x - x_0) + \frac{R}{p}||x - x_0||_p^p, \forall x \in B(x_0, \epsilon)$,
where $df(x_0, h) = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + th) - f(x_0))$, x_0 is the optimal solution of $P(0)$, $B(x_0, \epsilon)$ is the ball centered at x_0 with radius ϵ, $||.||_p$ and $||.||_q$ are respectively the $\ell(p)$ and $\ell(q)$ norm $(q \geq p > 1)$. $A^\sharp = A^T(AA^T)^{-1}$ denotes the pseudo-inverse of A, A^T being the adjoint of A.
Recently appeared some papers which have investigated the stability analysis of a mathematical programming problem under with the quadratic growth conditions. Lemaréchal and Sagastizábal [12] have studied the remainder term in first-order development of a convex function; they have proved that the quadratic growth condition is satisfied if and only if the associate subdifferential satisfies a linear growth condition. The same authors [13] have used this condition in the study of the Moreau-Yosida regularization. Bonnans and Ioffe [2] have characterised the quadratic growth for a min-max convex problem with C^2 functions. Janin and Gauvin [9, 10] have obtained a Lipschitz stability result assuming a sub- and super-quadratic growth condition in a finite dimensional space. An extension of this result in a Hilbert space for an equality constraints case and an application to the study of Mossolov's problem are presented in [5].

main results :
Theorem 1 Under hypothesis **H2** and the Mangasarian-Fromovitz condition, there exists $\delta > 0$, such that, for every perturbation y satisfying $||y|| \leq \delta$, we have :
1) there exist $\tilde{\sigma} \in \partial f(x_0)$, $\lambda \in I\!R^m$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I(x_0)$ and a submatrix A_L of A such that

$$rgA_L = rgA,\ A_L^T\lambda = \tilde{\sigma},\ (\lambda, A_L x_0) = 0,\ dv(0, y) = (\tilde{\sigma}, A_L^\sharp y).$$

2) If we denote by :

$$\sum(f, y) = \{\sigma \in \partial f(x_0), (\sigma, A_L^\sharp y) > (\lambda, y), \forall \lambda \in \Lambda(x_0)\},$$

then, either :
$\sum(f, y) = \emptyset$, in which case :

$$v(y) - v(0) \leq dv(0, y) + \frac{R}{p} \parallel A_L^\sharp y \parallel_p^p,$$

or $\sum(f, y) \neq \emptyset$, in which case :

$$v(y) - v(0) \leq dv(0, y) + \frac{R}{p}\Big\{ \parallel A_L^\sharp y \parallel_p^p + \sup_{\sigma \in \sum(f,y)} \Big(\frac{(\sigma - \tilde{\sigma}, A_L^\sharp y)}{\parallel (I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma}) \parallel_{p*}} \Big)^p \Big\},$$

where $p*$ is the conjugate of p and I is the identity operator on X.
Theorem 2 Under hypothesis **H1** and **H2** $(p = q)$ and the Mangasarian-Fromovitz condition,

there exist $\delta > 0$, such that, for every perturbation y satisfying $||y|| \leq \delta$, we have :
i) Either $\sum(f,y) \neq \emptyset$, in which case

$$||x(y) - x_0||_p \leq \left(\frac{R}{\rho}(1 + \sup_{\sigma \in \sum(f,y)} \frac{||\sigma - \tilde{\sigma}||_{p*}^p}{||(1_X - A^\sharp A)(\sigma - \tilde{\sigma})||_{p*}^p}) \right)^{\frac{1}{p}} \parallel A^\sharp \parallel_p ||y||_p,$$

ii) or $\sum(f,y) = \emptyset$, in which case $||x(y) - x_0||_p \leq \left(\frac{R}{\rho}\right)^{\frac{1}{p}} \parallel A^\sharp \parallel_p ||y||_p$.

1 Hypothèses et notations

Dans cette étude, on se place dans le cas de dimension finie ($X = I\!R^n$ et $Y = I\!R^m$). Nous considérons le problème de programmation mathématique perturbé :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ Ax \in y + K, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction convexe continue pas nécessairement différentiable, A est un opérateur linéaire de X dans Y et K désigne le cône de $I\!R^m$ défini par :

$$K = \{y \in I\!R^m,\, y_i = 0\,(1 \leq i \leq r)\,,\, y_i \geq 0\,(r+1 \leq i \leq m)\}.$$

On fait les hypothèses suivantes sur f
H1 : (Hypothse de minoration de la croissance de degré q)
$\exists \rho > 0$, tel que, $f(x) \geq f(x_0) + df(x_0, x - x_0) + \dfrac{\rho}{q}||x - x_0||_q^q$, $\forall x \in B(x_0, \epsilon)$.
H2 : (Hypothse de majoration de la croissance de degré p)
$\exists R > 0$, tel que, $f(x) \leq f(x_0) + df(x_0, x - x_0) + \dfrac{R}{p}||x - x_0||_p^p, \forall x \in B(x_0, \epsilon)$,
où : $df(x_0, h) = \lim\limits_{t \searrow 0} \dfrac{1}{t}(f(x_0 + th) - f(x_0))$, x_0 est une solution optimale du problème (1) associée à $y = 0$, $B(x_0, \epsilon)$ la boule ouverte de $I\!R^n$ de centre x_0 et de rayon ϵ, $||.||_p$ et $||.||_q$ sont respectivement les normes $\ell(p)$ et $\ell(q)$ par rapport à la base de $I\!R^n$ formée de vecteurs base de $KerA$ et de vecteurs base de $ImA^\sharp$, p et q étant deux réels tels que $q \geq p > 1$ et $A^\sharp = A^T(AA^T)^{-1}$ le pseudo-inverse de A.

Remarque 1.1 *On prend une norme $\ell(p)$ (ou $\ell(q)$) de telle sorte qu'on a un "théorème de Pythagore" : Si $X = X_1 \oplus X_2$, où $X_1 = KerA$ et $X_2 = ImA^\sharp$ et si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, alors :*

$$\parallel x \parallel_p^p = \parallel x_1 \parallel_p^p + \parallel x_2 \parallel_p^p .$$

L' égalité précédente n'est pas valable pour les autres décompositions de X.

Les résultats du premier ordre pour les problèmes convexes et non convexes sont traités dans [3, 4, 11, 8, 7, 14], le second ordre est étudié dans [1, 2].
On suppose que la condition de Mangasarian-Fromovitz (CMF) est réalisée en x_0 solution optimale du problème (1) associée à $y = 0$, i.e :

(a) $A^i\,(1 \leq i \leq r)$ sont linéairement indépendants.

(b) $\exists z \in I\!R^n$ tel que $A^i z = 0\,(1 \leq i \leq r),\ A^i z > 0,\ i \in I(x_0)$,

où $I(x) = \{i\ :\ r+1 \leq i \leq m,\ A^i x = 0\}$ et A^i sont les vecteurs lignes de la matrice A.
Sous la condition (CMF), il existe des multiplicateurs de Lagrange Kuhn-Tucker, i.e :
$\exists \lambda \in K^+ = \{\lambda \in I\!R^m,\ \lambda^T u \geq 0, \forall u \in K\}$, tel que :

$$A^T \lambda \in \partial f(x_0),\ \ \lambda^T A x_0 = 0,$$

ou encore

$$\lambda_i \geq 0, i \in I(x_0), \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A^i \in \partial f(x_0),\ \lambda_i A^i x_0 = 0,\ (1 \leq i \leq m). \tag{2}$$

On note

$$\Lambda(x_0) = \{\lambda \in I\!R^m, \lambda \text{ satisfait } (2)\}.$$

$$v(y) = \inf_{Ax \in y+K} f(x).$$

$$\sum(f,y) = \{\sigma \in \partial f(x_0), (\sigma, A^{\sharp} y) > (\lambda, y), \forall \lambda \in \Lambda(x_0)\}.$$

On vérifie que (voir [14]) :

$$\partial v(0) = \Lambda(x_0).$$

2 Stabilité de type Hölder

Le thorme suivant donne une majoration du reste du dveloppement l'ordre deux de la fonction valeur du problme (1) au voisinage de l'origine sous l'hypothse **H2** et la condition de Mangasarian-Fromovitz (CMF). Cette majoration du reste fait intervenir un ensemble qui a la même forme que $\sum(f,y)$ et le pseudo-inverse d'une sous matrice de A.

Théorème 2.1 *Sous l'hypothse de majoration de la croissance de degré p et la condition de Mangasarian-Fromovitz (CMF), il existe $\delta > 0$, tel que, pour toute perturbation y vérifiant $||y|| \leq \delta$, on ait*
1) il existe $\tilde{\sigma} \in \partial f(x_0)$, $\lambda \in I\!R^m$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I(x_0)$ et une sous matrice A_L de A, tels que

$$rgA_L = rgA,\ \ A_L^T \lambda = \tilde{\sigma},\ \ (\lambda, A_L x_0) = 0,\ \ dv(0,y) = (\tilde{\sigma}, A_L^{\sharp} y).$$

2) si l'on pose :

$$\sum(f,y) = \{\sigma \in \partial f(x_0), (\sigma, A_L^{\sharp} y) > (\lambda, y), \forall \lambda \in \Lambda(x_0)\},$$

l'alternative suivante est vérifiée :
Soit $\sum(f,y) = \emptyset$ et dans ce cas

$$v(y) - v(0) \leq dv(0,y) + \frac{R}{p} ||A_L^{\sharp} y||_p^p.$$

Soit $\sum(f,y) \neq \emptyset$ et dans ce cas

$$v(y) - v(0) \leq dv(0,y) + \frac{R}{p} \Big\{ ||A_L^{\sharp} y||_p^p + \sup_{\sigma \in \sum(f,y)} \Big(\frac{(\sigma - \tilde{\sigma}, A_L^{\sharp} y)}{||(I - A_L^{\sharp} A_L)(\sigma - \tilde{\sigma})||_{p*}} \Big)^p \Big\},$$

où $p*$ est le conjugué de p et I l'opérateur identité de $I\!R^n$.

Ide de la dmonstration. La dmonstration du Thorme 2.1 s'appuit sur le lemme suivant (Voir [6, 10]).

Lemme 2.1 *Sous la condition de Mangasarian-Fromovitz (CMF) et l'hypothèse de majoration de la croissance de degré p, il existe $\delta > 0$, tel que, pour toute perturbation y vérifiant $||y|| \leq \delta$, la fonction valeur du problème (1) satisfasse*

$$v(y) \leq v(0) + \max_{\sigma \in \partial f(x_0)} \min_{Ah \in y + K_0} \left\{ (\sigma, h) + \frac{R}{p} ||h||_p^p \right\}$$

où

$$K_0 = \{y \in I\!R^m,\, y_i = 0\,(1 \leq i \leq r)\,,\, y_i \geq 0,\, i \in I(x_0)\}.$$

Théorème 2.2 *Sous les hypothses de majoration et de minoration de la croissance de degrés respectifs p et q $(1 < p < q)$ et la condition de Mangasarian-Fromovitz (CMF), il existe $\delta > 0$, tel que, pour toute perturbation y vérifiant $||y|| \leq \delta$, on ait :*
Soit $\sum(f, y) \neq \emptyset$ et dans ce cas :

$$||x(y) - x_0||_q \leq \left(\frac{q}{p} \frac{R}{\rho} (1 + \sup_{\sigma \in \sum(f,y)} \frac{||\sigma - \tilde{\sigma}||_{p*}^p}{||(I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma})||_{p*}^p}) \right)^{\frac{1}{q}} \| A_L^\sharp \|_p^{\frac{p}{q}} \, ||y||_p^{\frac{p}{q}}.$$

Soit $\sum(f, y) = \emptyset$ et dans ce cas :

$$||x(y) - x_0||_q \leq \left(\frac{q}{p} \frac{R}{\rho} \right)^{\frac{1}{q}} \| A_L^\sharp \|_p^{\frac{p}{q}} \, ||y||_p^{\frac{p}{q}},$$

où $||A||_p = \sup_{||x||_p \neq 0} \dfrac{||Ax||_p}{||x||_p}$.

Preuve. Voir [6].

3 Stabilité de type Lipschitz

Supposons dans cette section que les hypothses de minoration et de majoration de la croissance **H1** et **H2** sont de même degré $(q = p)$. Le résultat suivant donne une stabilité de type Lipschitz de la solution optimale du problème (1).

Corollaire 3.1 *Si f satisfait les hypothses de minoration et de majoration de la croissance* **H1** *et* **H2** *avec $(p = q)$ et si la condition de Mangasarian-Fromovitz (CMF) est réalisée en x_0, alors, il existe $\delta > 0$, tel que, pour toute perturbation y vérifiant $||y|| \leq \delta$, on ait :*
soit $\sum(f, y) \neq \emptyset$ et dans ce cas :

$$||x(y) - x_0||_p \leq \left(\frac{R}{\rho} (1 + \sup_{\sigma \in \sum(f,y)} \frac{||\sigma - \tilde{\sigma}||_{p*}^p}{||(I - A_L^\sharp A_L)(\sigma - \tilde{\sigma})||_{p*}^p}) \right)^{\frac{1}{p}} \| A_L^\sharp \|_p \, ||y||_p.$$

soit $\sum(f, y) = \emptyset$ et dans ce cas :

$$||x(y) - x_0||_p \leq \left(\frac{R}{\rho} \right)^{\frac{1}{p}} \| A_L^\sharp \|_p \, ||y||_p.$$

Preuve. La dmonstration est la même que celle du Thorme 2.2 avec $p = q$.

References

[1] **Auslender A., Cominetti R.** First and second order sensitivity analysis of nonlinear programs under directional constraint qualification conditions, Optimization **21**, 1990, pp 351-363.

[2] **Bonnans J.F., Ioffe A.D.** Quadratic growth and stability in convex programming with multiple solutions, Journal of Convex Analysis, **2**, No 1/2, 1995, pp 41-57.

[3] **Gauvin J., Janin R.** Directional behaviour of optimal solutions in nonlinear mathematical programming, Mathematics of Operations Research, **13**, 1988, pp 629-649.

[4] **Gauvin J., Janin R.** Directional lipschitzian behaviour of optimal solutions and directional derivatives for the optimal value function in nonlinear mathematical programming, Analyse non linéaire (H.Attouch et coll. eds), C.R.M. et Gauthier-Villars, Paris, 1989, pp 305-324.

[5] **Hilout S.** Directional Lipschitzian optimal solution of infinite dimentional optimization problems, Appl. Math. Lett., Vol 11, No. 6, 1998, pp 123-128.

[6] **Hilout S.** Stabilité hölderienne et lipschitzienne de la solution optimale d'un problème de programmation mathématique convexe non différentiable, Thèse de l'Université de Poitiers, 1998.

[7] **Hiriart-Urruty J.B., Lemaréchal C.** Convex Analysis and Minimization Algorithms, Springer-Verlag 1993 (deux volumes).

[8] **Janin R.** Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming, Mathematical Programming, **21**, 1984, 110-126.

[9] **Janin R., Gauvin J.** Lipschitz continuity of the optimal solution to elementary convex programs, Proc. Catalan days applied mathematics, Presses Universitaires de Perpignan, M. Sofonea and J. N. Corvellec (eds), 1995, pp 149-161.

[10] **Janin R., Gauvin J.** Lipschitz stability in nonsmooth convex programs, SIAM J. Optimization (à paraître).

[11] **Janin R., Mado J.C., Narayaninsamy J.** Second order multipliers and marginal function in nonlinear programs, Optimization, **22**, 1991, pp 163-176.

[12] **Lemaréchal C., Sagastizábal C.** More than first-order developments of convex functions: Primal-Dual Relations, Journal of Convex Analysis, Vol 3, **2**, 1996, pp 81-110.

[13] **Lemaréchal C., Sagastizábal C.** Pratical aspects of the Moreau-Yosida regularization : Theoretical preliminaries, SIAM J. Optimization, Vol 7, **2**, 1997, pp 367-385.

[14] **Rockafellar R.T.** Convex Analysis, Princeton University Press, 1970.