Classification des éléments nilpotents compacts des algèbres de Lie simples

Classification of compact nilpotent elements in simple Lie algebras

par A.G. Elashvili[1] et G. Grélaud[2]

Abstract – We give a classification for a kind of nilpotent elements, the compact elements, in simple Lie algebras and we show that this classification is strongly related to a property of the codimension of the orbit in its closure (Vogan property).

Résumé – Nous donnons une classification de certains éléments nilpotents, appelés nilpotents compacts, des algèbres de Lie simples et montrons que cette classification est liée à une propriété de la codimension de l'orbite de l'élément dans son adhérence (propriété de Vogan).

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit $e \in \mathfrak{g}$ un élément nilpotent et Ω_e son orbite (nilpotente) sous l'action de $\boldsymbol{G}$. On note $\mathfrak{g}_x$ le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un élément x de $\mathfrak{g}$.

Définition — *On appelle élément compact, un élément e de $\mathfrak{g}$ qui appartient à $[\mathfrak{g}_e, \mathfrak{g}_e]$.*

Cette terminologie est justifiée par les analogies avec les éléments compacts et précompacts des groupes de Lie étudiés dans [1]. Tout élément compact est évidemment nilpotent.

On note $\boldsymbol{G}$ le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$. On sait classer les orbites nilpotentes à l'aide des classes de conjugaison de $\mathfrak{sl}(2)$-triplets de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire des triplets (h, e, f) d'éléments de $\mathfrak{g}$ tels que $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$ où e est un élément nilpotent (théorème de Jacobson-Morozov). Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Δ le système de racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ une base de Δ où r désigne le rang de $\mathfrak{g}$. Si (e, f, h) est un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet alors h est le conjugué par $\boldsymbol{G}$ d'un élément h' de $\mathfrak{h}$ tel que $\alpha_i(h') \in \{0, 1, 2\}$ pour $1 \leq i \leq r$ et la suite $C_{\Omega_e} = \{n_i = \alpha_i(h')\ ;\ i = 1, \ldots, r\}$ est appelée la caractéristique de l'orbite Ω_e. La correspondance entre orbites et caractéristiques est bien connue (cf. [2]).

Soit (e, f, h) un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet avec e nilpotent. L'opérateur $\mathrm{ad}(h)$ étant diagonalisable avec des valeurs propres entières, on note $\mathfrak{g}(k)$, $k \in \mathbb{N}$ le sous-espace propre de valeur propre k ($\mathfrak{g}(k) = \{0\}$ si k n'est pas valeur propre). Enfin, on pose $\mathfrak{g}_e(k) = \mathfrak{g}(k) \cap \mathfrak{g}_e$.

---

[1] 380093 Tbilissi, GEORGIA, Institute of mathematics, A.S. of Georgia, ul. Zoi Ruchadze 1.

[2] Université de Poitiers, Mathématiques, 40 Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS CEDEX, FRANCE; URA CNRS: D1322 – Groupes de Lie et Géométrie.

Les algèbres $\mathfrak{g}(0)$ et $\mathfrak{g}_e(0)$ sont réductives, le sous-espace $\mathfrak{g}_e(2)$ est un $\mathfrak{g}_e(0)$-module complètement réductible et e est un élément $\mathfrak{g}_e(0)$-invariant de $\mathfrak{g}_e(2)$, donc $e \notin [\mathfrak{g}_e(0), \mathfrak{g}_e(2)]$. Cet argument montre que e est compact si et seulement si e appartient à $[\mathfrak{g}_e(1), \mathfrak{g}_e(1)]$.

La classification, qui se réduit au cas des algèbres de Lie simples, est simplifiée par le lemme suivant:

Lemme — *Si e est un élément nilpotent compact de $\mathfrak{g}$, la caractéristique de son orbite n'est composée que de 0 et de 1.*

Démonstration — Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\Delta = \{\alpha\}$ un système de racines positives associé. On convient de noter X_α, $Y_\alpha = X_{-\alpha}$ et H_i, $i = 1, \dots, r$ où r est le rang de $\mathfrak{g}$, les éléments d'une base de Chevalley associée au système de racines Δ et à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. On a alors $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$ avec $N_{\alpha,\beta}$ entier et $[H_i, X_\alpha] = \alpha(H_i) X_\alpha$. Supposons que pour le triplet (f, h, e) on ait $[h, X_\alpha] = 2X_\alpha$ pour une racine α simple. Notons $e = \sum_i c_\beta X_\beta$. Puisque $[\mathfrak{g}(0), e] = \mathfrak{g}(2)$ on voit que, remplaçant e par un vecteur e' dans l'orbite $\boldsymbol{G}_0.e$ de e sous l'action du groupe adjoint $\boldsymbol{G}_0$ de $\mathfrak{g}(0)$, on peut supposer que $c_\alpha \neq 0$. Mais si on suppose $e \in [\mathfrak{g}(1), \mathfrak{g}(1)]$, e est combinaison linéaire d'éléments $X_{\gamma+\delta}$ donc α ne peut pas être racine simple. ∎

La classification des éléments nilpotents compacts.

Pour les algèbres de type A_n, B_n, C_n et D_n, les orbites nilpotentes sont classifiées par certaines suites d'entiers $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_k$ telles que $\sum_i l_i$ soit égal à $n+1$ pour A_n, $2n+1$ pour B_n, $2n$ pour et C_n D_n (cf. [2] Chap. 13). Avec ces notations, la classification est la suivante:

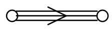
Théorème 1 — *La suite $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_k$ représente une orbite constituée d'éléments nilpotents compacts si et seulement si $l_k = 1$ et pour tout p entier compris entre 1 et l_1, il existe au moins un indice j tel que $l_j = p$.*

Remarque 1 — Soit e un élément d'une algèbre de Lie semi-simple. Nous dirons que e possède la propriété de Vogan si la codimension de $\overline{\Omega}_e \backslash \Omega_e$ est strictement supérieure à 2, $\overline{\Omega}_e$ étant l'adhérence de l'orbite Ω_e. Les orbites nilpotentes de ce type ont été classifiées, dans le cas des algèbres de Lie classiques par D. Vogan (communication privée), qui nous a fait remarquer que la classification du théorème 1 coïncide avec celle des orbites ayant la propriété de Vogan.

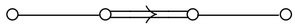
Pour l'étude des algèbres simples exceptionnelles, nous remarquons tout d'abord que si A est une sous-algèbre de B, tout vecteur nilpotent compact de A est aussi nilpotent compact de B. La recherche de ces éléments s'est alors effectuée avec l'aide des tables connues ([2],[3]) et de calculs directs à l'aide des bases de Chevalley obtenues dans [4]. Nous avons ensuite vérifié ces calculs en utilisant un programme sur ordinateur et le logiciel de calcul formel Axiom.

Nous donnons pour chacune des algèbres exceptionnelles la caractéristique des orbites d'éléments nilpotents compacts en utilisant les notations de [4] ainsi que sa notation usuelle (cf. [2] et [3]). De plus, nous utilisons le fait que $E_6 \subset E_7$, $E_7 \subset E_8$ et que ces inclusions conservent le type compact ou non compact des orbites nilpotentes.

Théorème 2 — *La classification des éléments nilpotents compacts des algèbres de Lie simples exceptionnelles est la suivante:*

Algèbre de type G_2 avec le diagramme de Dynkin : 

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

Algèbre de type F_4 avec le diagramme de Dynkin : 

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A_2 + \widetilde{A}_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1 + \widetilde{A}_1$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{A}_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

Algèbre de type E_6:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & & \end{pmatrix} = A_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} = 2A_1$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} = 3A_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & & \end{pmatrix} = A_2 + A_1$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} = A_2 + 2A_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 0 & & \end{pmatrix} = 2A_2 + A_1$$

Algèbre de type E_7:

En plus des éléments provenant de E_6 il y a les éléments de caractéristiques suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & & & \end{pmatrix} = 4A_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_4 + A_1$$

Algèbre de type E_8:

En plus des éléments provenant de E_7 il y a les éléments de caractéristiques suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{pmatrix} = A_2 + 3A_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{pmatrix} = A_3 + A_2 + A_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{pmatrix} = 2A_3 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & & & & \end{pmatrix} = A_4 + 2A_1$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{pmatrix} = 2A_2 + 2A_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & & & & \end{pmatrix} = A_4 + A_3$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & & & & \end{pmatrix} = A_3 + 2A_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & & & & \end{pmatrix} = D_4(a_1) + A_1$$

Remarque 2 — En utilisant la description explicite de la relation “$x > y$ si et seulement si $\overline{\Omega}_x \supset \Omega_y$” pour des éléments nilpotents x et y (cf. [5]), et le calcul de la dimension des orbites nilpotentes des algèbres exceptionnelles de [3], nous avons classifié tous les éléments nilpotents ayant la propriété de Vogan (cf. Remarque 1). Comme dans le cas classique, les deux classifications coïncident. Il serait évidemment intéressant d'expliquer cette relation entre la propriété de compacité et la propriété de Vogan.

Les auteurs remercient J.L. Brylinski et D. Vogan pour d'intéressantes discussions.

References

[1] P. Blanc, J.L. Brylinski, *Cyclic Homology and the Selberg Principle*, Journal of Functional Analysis **109** (1992), 289-330.

[2] R.W. Carter, *Finite Groups of Lie Type,* Wiley Interscience, Pure and Applied Mathematics , 1985.

[3] A.G. Elashvili, *Centralizers of nilpotent elements in semisimple Lie algebras*, Sakharth. SSR Mecn. Acad. Math. Inst. Srom. **46** (1975), 109-132.

[4] G. Grélaud, C. Quitté, P. Tauvel, *Bases de Chevalley et* $\mathfrak{sl}$*(2)-triplets des algèbres de Lie simples exceptionnelles*, Prépublications du Département de Mathématiques de l'Université de Poitiers, France **52** (1990).

[5] N. Spaltenstein, *Classes Unipotentes et sous-groupes de Borel*, Lectures Notes in Mathematics **946**.

le 15 janvier 1998