Contrôle du 25 mars 2003
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 – Calculer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} x^n$$

Exercice 2 – On considère l'équation différentielle

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \tag{1}$$

On recherche une solution sous la forme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x > 0$.

a) Si cette série est solution de (1), trouver une relation entre a_n et a_{n-1} pour $n > 1$.

b) Calculer a_n pour tout $n > 1$ en fonction de a_0, puis le rayon de convergence de la série entière.

c) Calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$, pour $x > 0$. Comparer avec la série trouvée en b) et conclure.

Exercice 3 – On note E un espace euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé. On considère le plan P_1 d'équation

$$x - 3z = 0$$

a) Déterminer un vecteur orthogonal à ce plan.

b) Même question pour le plan P_2 d'équation

$$y - 2z = 0$$

et donner une équation du plan P orthogonal à la droite D intersection de P_1 et P_2, contenant l'origine.

c) Déterminer une base orthonormée de E dont 2 vecteurs appartiennent à P et le troisième a la direction de D.

Exercice 4 – a) Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $2\pi-$périodique

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

b) Ecrire la série de Fourier de f et justifier sa convergence en tout point. De la somme de cette série de Fourier en $x = \frac{\pi}{2}$, déduire la somme de la série alternée

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

En appliquant l'égalité de Parseval, calculer la somme de la série numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$