Partiel du 20 novembre 2002
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

On considère la courbe paramétrée définie par :

$$t \in [-\pi, \pi] \qquad \begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}$$

1) Démontrer que le tracé de cette courbe est symétrique par rapport aux 2 axes de coordonnées et par rapport à la droite d'équation $y = x$.
En déduire qu'il suffit d'étudier cette courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

2) Après avoir déterminé les variations de x et y pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, tracer la courbe complète. On précisera en particulier les tangentes à la courbe aux points de paramètres $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$ et la nature des points correspondants.

3) Calculer la longueur de la courbe entre les points de paramètres $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$. Calculer le rayon de courbure en un point $M(t)$ de la courbe pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

4) On considère un point $M(t)$ de la courbe pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Ecrire une équation de la tangente à la courbe en ce point. Déterminer les coordonnées des points de rencontre A_t et B_t de cette tangente avec les 2 axes de coordonnées. Calculer la longueur du segment A_tB_t.

Exercice 2

On note $\mathcal{P}_2 \subset \mathbb{C}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, à coefficients complexes.
On note $B = \{1, X, X^2\}$ la base habituelle de $\mathcal{P}_2$.
A tout polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathcal{P}_2$ on associe le polynôme
$Q(X) = (c-b)X^2 + (a-c)X + (b-a)$ et on note $Q = f(P)$.

1) Vérifier que f est une application linéaire de $\mathcal{P}_2$ dans lui-même.

2) Montrer que la matrice de f dans la base B est

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Calculer les valeurs propres de $M(f)$ et en déduire que cette matrice est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$). Si D désigne une matrice diagonale semblable à $M(f)$, déterminer la matrice de passage P correspondante, et donner la relation entre D et $M(f)$.

4) Calculer l'inverse de la matrice de passage trouvée à la question 3).