Partiel du 22 novembre 2001
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. On considère la base usuelle $B = \{1, X, X^2\}$ de cet espace.

Pour $P \in E$ on pose $u(P) = X^2 P(\frac{1}{X})$.

1-a/ Montrer que $u(P) \in E$ et que u est une application linéaire de E dans lui-même.

1-b/ Déterminer la matrice M de u dans la base B.

1-c/ Montrer que M est diagonalisable, déterminer une matrice diagonale semblable à M, la matrice de passage correspondante et son inverse.

1-d/ Calculer M^8 et M^7.

Exercice 2

On étudie la courbe paramétrique définie par

$$x = 2\cos t - \cos(2t) \quad ; \quad y = 2\sin t + \sin(2t)$$

2-a/ Expliquer pourquoi on peut restreindre l'étude à $t \in [0, \pi]$.

2-b/ Faire l'étude locale de la courbe au voisinage du point de paramètre $t = \frac{\pi}{3}$. On précisera en particulier la tangente à la courbe en ce point et la nature du point.

2-c/ Déterminer les tangentes à la courbe aux points de paramètres $t = 0$ et $t = \pi$.

2-d/ Faire le tableau des variations de x et y sur $[0, \pi]$ puis tracer la courbe (pour $t \in \mathbb{R}$) en tenant compte des résultats des questions précédentes.

2-e/ Calculer la longueur de la courbe entre le point de paramètre $t = 0$ et le point de paramètre $t = \frac{\pi}{3}$.