Partiel du 27 mars 2002
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice 1 – **a.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}\right)z^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}z^{2n}$$

b. Calculer la somme de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}x^{2n}$$

lorsque $|x|$ est inférieur au rayon de convergence de la série.

Exercice 2 – On considère l'équation différentielle

$$xy'' - 2xy' - 2y = 1$$

Montrer qu'il existe des solutions de cette équation développables en série entière et écrire ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3 – On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base orthonormale canonique de E.

a. Déterminer les réels a, b, c pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & c \end{pmatrix}$$

soit orthogonale de déterminant 1.

b. On note u l'application linéaire dont la matrice (orthogonale) est M dans la base $\mathcal{B}$ et F le plan orthogonal au vecteur $v = e_1 - e_2$. Trouver une base orthonormée de chacun des sous-espaces F et $u(F)$.
Déterminer les équations de F et de $u(F)$ dans le repère $(0, \mathcal{B})$.

c. On pose $w = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_2)$. Vérifier que $\mathcal{B}_1 = (w, e_3)$ est une base orthonormée de F.
On considère dans F la courbe dont l'équation dans le repère $(0, \mathcal{B}_1)$ est

$$2X^2 + Y^2 + 2\sqrt{6}XY + X = 0$$

Déterminer la nature de cette courbe, son centre et ses axes éventuellement.