UNIVERSITÉ DE POITIERS DEUG SM2

ANNÉE 2003-2004

Examen du 25 mai 2004
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1
Soit f la fonction $2\pi-$périodique, paire définie par $f(x) = \pi - 2x$ si $x \in [0, \pi]$

1) Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$.
2) On étudie la série de Fourier réelle de f

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

a/ Calculer c_0. Montrer que $b_n = 0$ pour tout n.
b/ Calculer $a_n,\ n \in \mathbb{N}^*$. On explicitera les valeurs de a_{2k} et a_{2k+1} en fonction de l'entier k.
3/ Justifier, à partir des résultats de la question 2/, la convergence de la série ci-dessous et la valeur de sa somme

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

En déduire la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 2
On considère le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$

$$V = (x^3 - y^3,\ x^3 + y^3)$$

Calculer le travail T_C de V le long de la courbe fermée C, définie par le demi-cercle $x^2 + y^2 = 4$ $y > 0$ et le segment $[-2, 2]$ de l'axe des abscisses, orientée dans le sens trigonométrique. On représentera d'abord la courbe C
[on pourra utiliser la formule de Green-Riemann ou de Stokes qu'on rappelle sous forme symbolique :

$$V = (P, Q) \qquad T_C(V) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

D étant le domaine limité par la courbe C convenablement orientée.]

Exercice 3 Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 4y(t) - 9\cos t + 17\sin t \\ y'(t) = 4x(t) - 3y(t) - 2\sin t - 4\cos t \end{cases}$$