Examen du 3 juin 2003
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 – Soit M la matrice symétrique :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a/ Montrer que le vecteur $V = (1,1,1)$ est vecteur propre de M et déterminer la valeur propre correspondante.

b/ Montrer que l'orthogonal de V dans $\mathbb{R}^3$ est engendré par les vecteurs $W_1 = (1,0,-1)$ et $W_2 = (1,-1,0)$, et que ces vecteurs sont propres pour M. En déduire la diagonalisation de M.

c/ Trouver une matrice orthogonale P telle que ${}^tPMP$ soit diagonale. (Cette question n'est pas utilisée dans la suite de l'exercice.)

d/ On considère le système différentiel suivant

$$S = \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + z(t) - 4t + 1 \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + z(t) - 2t - 2 \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) - 2t - 1 \end{cases}$$

d-*i*/ On pose $x_0(t) = 2t,\ y_0(t) = 1,\ z_0(t) = 0$. Vérifier que (x_0, y_0, z_0) est solution du système S.
d-*ii*/ En utilisant la question **b/** résoudre le système S_0

$$S_0 = \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

et en déduire les solutions du système S.

Exercice 2 – On note D la partie du plan définie par

$$D = \{(x,y);\ 0 < x < 1,\ 0 < y < x\}$$

a/ Représenter sur un graphique l'ensemble D.

b/ En utilisant le changement de variables

$$u = x + y \qquad v = x - y$$

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D (x+y)e^{x-y}\,dxdy$$

T.S.V.P. ►►►

Exercice 3 – a/ On considère le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{W}(x,y,z) = (-y,\ x,\ xz)$$

défini sur $\mathbb{R}^3$. Calculer le travail (ou circulation) de ce champ de vecteurs le long du cercle

$$C(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

entre les points de paramètres $t = 0$ et $t = 2\pi$. En déduire que $\overrightarrow{W}$ ne dérive pas d'un potentiel.

b/ On considère le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = (x + yz,\ y + xz,\ xy)$$

Calculer $\mathrm{Rot}\,\overrightarrow{V}$ et en déduire que $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel.

c/ Déterminer ce potentiel f, sachant que $f(0,0,0) = 0$.

d/ On note (Γ) l'hélice circulaire définie par

$$\Gamma(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$$

Calculer le travail de $\overrightarrow{V}$ le long de Γ entre les points de paramètres 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.