UNIVERSITÉ DE POITIERS

DEUG SM2
ANNÉE 2003-2004

Examen du 24 juin 2004
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1

Étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin x) \cdot \ln(1+x)}{x^2} dx$$

Exercice 2

Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -6 \\ -12 & 10 & 6 \\ 30 & -21 & -17 \end{pmatrix}$$

a) calculer le polynôme caractéristique de M et en déduire que M est diagonalisable.

b) Trouver les vecteurs propres de M et une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. Calculer $P^{-1}MP$ (on ne demande pas le calcul de P^{-1}).

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable. On pose $F(x,y) = y + f(x^2 - y^2)$.

a) Calculer

$$y\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

b) On veut résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante

(1) $$y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x$$

sur le domaine $x > 0$ et $x > y$. On note g une solution de cette équation et on pose

$$G(X,Y) = g(\sqrt{X+Y^2}, Y)$$

Montrer que $g(x,y) = G(x^2 - y^2, y)$ pour $x > 0,\ x > y$ et que

$$x\frac{\partial G}{\partial Y}(x^2 - y^2, y) = x$$

c) En déduire les solutions de (1) sur le domaine considéré.