UNIVERSITÉ DE POITIERS

DEUG SM2
ANNÉE 2002-2003

---

**Examen du 20 janvier 2003**
**(14 heures – 16 heures)**
**Aucun document ni calculatrice autorisés.**

---

Les exercices sont indépendants.

**Exercice 1 –** Déterminer la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{n!}{(2n)!} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^{\frac{1}{3}}} \qquad w_n = \sqrt{n}.\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$$

**Exercice 2 –** Etudier la convergence de l'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{t - \sin t}{t^3} dt$$

**Exercice 3 –** Démontrer la convergence de l'intégrale

$$I = \int_1^\infty \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2} dx$$

(on pourra, pour $x$ assez grand, majorer $(\ln x)^2$ par une expression bien choisie.)

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{1+n^2}$

**Exercice 4 –** On considère la fonction de 2 variables, définie sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = e^{x+y} + e^{-x} + e^{-y}$$

a) Calculer toutes les dérivées partielles premières et secondes de $f$.

b) Montrer qu'il existe un unique extremum local dont on déterminera la nature.

c) Montrer que pour $y$ fixé, la fonction $g(x) = f(x, y)$ admet un extremum global et calculer sa valeur $h(y)$ en fonction de $y$. Montrer que $h$ admet un extremum global puis en déduire que $f$ admet un extremum global.

d) Application : On veut construire une boîte parallélépipèdique en métal de dimensions $L,\ l,\ h$ et de volume $V = 1$.
Calculer la somme $S$ des aires des faces de la boîte en fonction de $L$ et $l$. En remarquant qu'un réel positif est l'image d'un réel par la fonction exponentielle, déterminer les dimensions de la boîte utilisant le minimum de métal (ou de poids minimum).