Examen du 21 janvier 2002
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice 1 – Soit T l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x,y) = (x^2, x - y^2)$$

On pose $u = u(x,y) = x^2$ et $v = v(x,y) = x - y^2$ et on note

$$D = \{(x,y)\ ;\ x > 0,\ y > 0\} \qquad U = \left\{(u,v)\ ;\ u > 0,\ v < \sqrt{u}\right\}$$

a) Montrer que T est une bijection de D sur U et déterminer la matrice jacobienne de T en un point (x,y).

b) Soit F une fonction de 2 variables, définie sur U et soit f la fonction définie sur D par $f(x,y) = F(x^2, x - y^2)$.
Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide des dérivées partielles de F.

c) Montrer que pour $(x,y) \in D$

$$2y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)$$

d) Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$2y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = y$$

e) Parmi les solutions de cette équation, trouver celles qui vérifient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$$

Exercice 2 –
a) Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x(4-x)}}{x}dx$$

est convergente.
b) Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x) + x}{x^2}dx$$

est convergente et calculer sa valeur [on pourra utiliser une intégration par parties].

Exercice 3 – Étudier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n!}\right) \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+2}{n(n+3)}\right) \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^n - 1\right)$$