Examen du 12 janvier 2004
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Déterminer la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \qquad v_n = (-1)^n \frac{(n-1)^2}{n^2+1}$$

$$w_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1} \qquad s_n = \left(\left(\frac{n-3}{n} \right)^n - e^{-3} \right)$$

Exercice 2

Soit $a > 2$. On considère les intégrales

$$I_a = \int_2^a \frac{dx}{x(\ln x)^2} \qquad \text{et} \qquad I = \int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

1) Calculer l'intégrale I_a. En déduire que l'intégrale I est convergente et calculer sa valeur.

2) Déduire de la question 1) la nature de la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$$

Exercice 3

Déterminer les extrema locaux de la fonction de deux variables définie par :

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x+2y-5)^2$$

En déduire le minimum de la distance du point $M = (1,1,1)$ aux points du plan d'équation $z = x + 2y - 4$.

Exercice 4

Quelle est la nature de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin t \ \ln t}{t\sqrt{t+1}} dt$$

[on pourra d'abord étudier l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t \ \ln t}{t\sqrt{t+1}} dt$*, puis montrer que l'intégrale* $\int_1^\infty \frac{\sin t \ \ln t}{t\sqrt{t+1}} dt$ *est absolument convergente.]*