Examen du 3 juin 2002
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice 1 – On considère l'intégrale

$$I = \iint_D \sin(x+2y)dxdy$$

où D est le l'ensemble

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x + 2y < 1\}$$

a – Représenter graphiquement l'ensemble D.
b – On note T la transformation du plan qui à (x,y) associe $T(x,y) = (u,v)$, $u = x$ et $v = x + 2y$. Déterminer l'ensemble $\Delta = T(D)$ et le représenter graphiquement.
c – Calculer l'intégrale I en utilisant le changement de variables T de D sur Δ.

Exercice 2 – **a)** Résoudre le système différentiel

$$S_1 = \begin{cases} z_1'(t) = -z_1(t) - 5t^2 - 8t \\ z_2'(t) = 5z_2(t) + 5t^2 - 4t \end{cases}$$

(On remarquera qu'il existe une solution particulière de chacune des équations qui est un polynôme de degré 2).

b. On considère le système différentiel

$$S_2 = \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 12t \\ y'(t) = 8x(t) + 3y(t) + 30t^2 \end{cases}$$

Résoudre le système S_2. [On pourra ramener la résolution du système S_2 à celle de S_1].

c. Trouver les solutions de S_2 vérifiant : $x(0) = 0;\ x'(0) = 0$.

Exercice 3 – Soit f la fonction 2π−périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,\pi[\\ x+\pi & \text{si } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

a. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi[$.

b. Calculer les coefficients de Fourier de f (on distinguera n pair et n impair).

c. Justifier la convergence de la série de Fourier en $x = \dfrac{\pi}{4}$ et en déduire que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$