Examen du 4 septembre 2002
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice 1 – On considère le domaine D du plan défini par

$$D = \{(x, y);\ 0 < x < 1,\ y > x^2;\ y < 2x - x^2\}$$

a) Représenter le domaine D.

b) Calculer l'aire de D.

c) Calculer les intégrales doubles

$$I_x = \frac{1}{3} \iint_D x dx dy \qquad I_y = \frac{1}{3} \iint_D y dx dy$$

(on pourra, éventuellement, avant tout calcul prouver que $I_x = I_y$).

d) Que représentent géométriquement les nombres I_x et I_y ? Justifier ainsi, sans calcul les valeurs trouvées en c).

Exercice 2 –
On considère l'équation différentielle

$$xy'' + 2y' - xy = 0$$

dont on cherche une solution sous la forme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ayant un rayon de convergence non nul.

a) On suppose que la série entière est solution de l'équation. Trouver une relation de récurrence entre les coefficients a_n et a_{n+2}.

b) Calculer a_1. En déduire à l'aide de a) l'expression de a_n en fonction de a_0.

c) Calculer le rayon de convergence de cette série entière et en déduire que sa somme est solution de l'équation différentielle.
Exprimer cette solution à l'aide de fonctions classiques.

Exercice 3 – On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On note P le plan engendré par les 2 vecteurs

$$V = (1, 2, 2, 0) \qquad W = (0, 3, 3, 1)$$

a) Calculer la norme des vecteurs V et W. Trouver une base orthonormée de P dont l'un des vecteurs est $\frac{V}{\|V\|}$.

b) Calculer les coordonnées du projeté orthogonal Z' du vecteur $Z = (1, 1, 1, 1)$ sur le plan P.