Examen du 3 septembre 2002
(9 heures – 11 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice 1 – a/ Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\sqrt{n}}}{n^4} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 2 – a/ Calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

b/ En déduire la nature de l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{5}{2}}}dx$$

Exercice 3 – Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et de classe C^2. On pose

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad x>0,\ y\in\mathbb{R}$$

a/ Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction de x, y et de φ' et φ''.

b/ Montrer que si f vérifie l'équation

(1) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y}{x^3} \qquad x>0,\ y\in\mathbb{R}$$

alors φ est solution de l'équation différentielle

(2) $$(t^2-1)\varphi''(t)+2t\varphi'(t)=t$$

[on pourra poser $t=\dfrac{y}{x}$.]

c/ Résoudre l'équation différentielle (2) [on remarquera que $t\mapsto\varphi(t)=\dfrac{t}{2}$ est solution de (2)]. En déduire une famille de fonctions de 2 variables solutions de (1).