UNIVERSITE DE POITIERS **Année 2001-2002**
MATHEMATIQUES **DEUG SM2**

Corrigé du partiel du 22 Novembre 2001

Exercice 1

1-a) Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme dans E. On a $X^2 P(\dfrac{1}{X}) = a + bX + xX^2 \in E$. Il en résulte aussitôt que $u(P) \in E$. La linéarité de u résulte du calcul suivant :

Soient $P_1 \in E,\ P_2 \in E,\ \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u(P_1 + \alpha P_2) &= X^2 \left((P_1 + \alpha P_2)(\frac{1}{X}) \right) + P_1(X) + \alpha P_2(X) \\ &= X^2 P_1(\frac{1}{X}) + P_1(X) + \alpha \left(X^2 P_2(\frac{1}{X}) + P_2(X) \right) \\ &= u(P_1) + \alpha u(P_2) \end{aligned}$$

1-b) Pour obtenir la matrice de u dans la base B, on calcule les images des vecteurs de la base par u.

$$u(1) = X^2 + 1 \qquad u(X) = 2X \qquad u(X^2) = 1 + X^2$$

d'où la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-c) On a

$$\det(M - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2$$

Il y a donc 2 valeurs propres 0 (de multiplicité 1) et 2 (de multiplicité 2). X est vecteur propre évident de valeur propre 2, de même que $X^2 - 1$ est vecteur propre de valeur propre 0. On peut aussi remarquer que $u(X^2 + 1) = 2(X^2 + 1)$ et que ce polynôme $X^2 + 1$ est non colinéaire à $X^2 - 1$. On en déduit que le sous-espace propre de valeur propre 2 est de dimension 2 (égale à la multiplicité de la valeur propre) ce qui suffit pour affirmer que M est diagonalisable. Une matrice diagonale semblable à M est donc

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec pour matrice de passage possible déduite des vecteurs propres trouvés :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-d) Pour calculer les puissances de M on écrit $D = P^{-1} M P$ donc $M = P D P^{-1}$ et $M^n =$

PD^nP^{-1}. Or il est immédiat que

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc pour tout n, $M^n = 2^{n-1}M$.

Exercice 2

2-a) On remarque que x et y sont périodiques de période 2π, donc la courbe complète est obtenue pour $t \in [0, 2\pi]$. De plus $x(t) = x(-t)$ et $y(t) = -y(-t)$ d'où une symétrie par rapport à l'axe des x. Il suffit donc d'étudier la courbe pour $t \in [0, \pi]$ et de compléter par cette symétrie.

2-b) On fait un développement limité de x et y au voisinage de $t = \dfrac{\pi}{3}$, par exemple en calculant les dérivées successives de ces fonctions :

$$\begin{cases} x'(t) = -2\sin t + 2\sin(2t) \quad ; \quad x'(\frac{\pi}{3}) = 0 \\ y'(t) = 2\cos t + 2\cos(2t) \quad ; \quad y'(\frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(t) = -2\cos t + 4\cos(2t) \quad ; \quad x''(\frac{\pi}{3}) = -3 \\ y''(t) = -2\sin t + 4\sin(2t) \quad ; \quad y''(\frac{\pi}{3}) = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{[3]}(t) = 2\sin t - 8\sin(2t) \quad ; \quad x^{[3]}(\frac{\pi}{3}) = -3\sqrt{3} \\ y^{[3]}(t) = 2\cos t + 2\cos(2t) \quad ; \quad y^{[3]}(\frac{\pi}{3}) = 3 \end{cases}$$

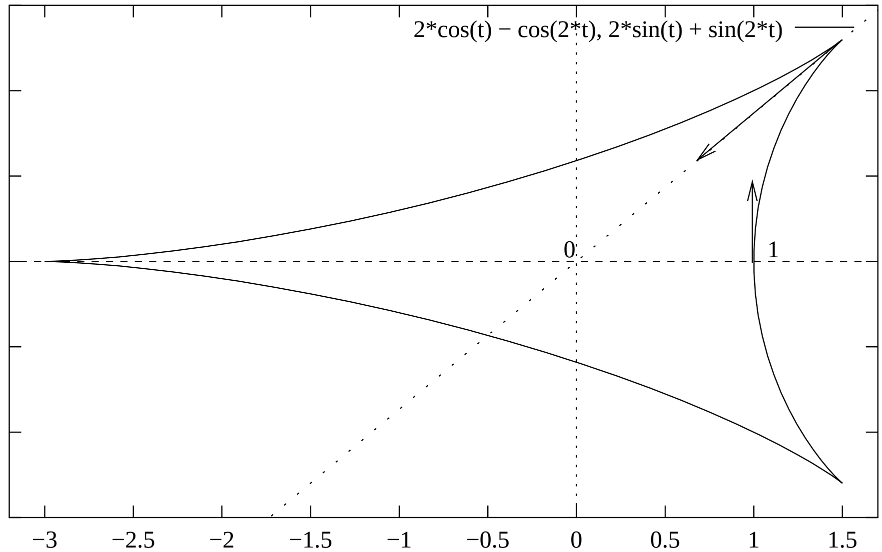
Un vecteur tangent est donc $\vec{T} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et le vecteur dérivé troisième $\vec{W} = 3\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{T}$. Le point correspondant est donc un rebroussement de première espèce.

2-c) En $t = 0$ on a $x'(0) = 0$ et $y'(0) = 4$ donc la tangente est verticale en ce point de coordonnées $(1, 0)$. En $t = \pi$, le point est stationnaire comme il résulte du calcul des dérivées. Or $x''(\pi) = 0$ et $y''(\pi) = 6$. On a donc une tangente horizontale au point de coordonnées $(-3, 0)$, d'où, compte tenu de la symétrie, un point de rebroussement de première espèce.

2-d) Tableau des variations :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		π
x'	0	$+$	0	$-$	0
x	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3
y'	4	$+$	0	$-$	0
y	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

De ce tableau et des questions précédentes, on déduit le tracé de cette courbe paramétrée.



2-e) Calcul de la longueur L de la courbe. si $t \in [0, \frac{\pi}{3}[$, il n'y a pas de point singulier. On a donc

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Mais on a

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= \big(-2\sin(t) + 2\sin(2t)\big)^2 + \big(2\cos(t) + 2\cos(2t)\big)^2 = 8(1 + \cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t) \\ &= 8(1 + \cos(3t)) \\ &= 16\cos^2(\frac{3}{2}t) \end{aligned}$$

Donc, puisque $\cos(\frac{3}{2}t) \geq 0$ si $0 < t < \frac{\pi}{3}$,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\cos(\frac{3}{2}t) dt \tag{1}$$

$$= 4\frac{2}{3}\left[\sin(\frac{3}{2}t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \tag{2}$$

$$= \frac{8}{3} \tag{3}$$