Corrigé du partiel du 20 novembre 2002

Exercice 1

1) a) $x(t) = x(-t)$ et $y(t) = -y(-t)$ ce qui indique une symétrie par rapport à l'axe des abscisses et permet de réduire l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
b) De même, $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, d'où une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et une réduction de l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.
c) Enfin, $x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t)$ et $y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t)$, correspond à une symétrie par rapport à la droite $y = x$ (échange les coordonnées). On peut encore réduire l'intervalle d'étude à $[0, \frac{\pi}{4}[$ et tracer la courbe complète en utilisant ces 3 symétries.

2) les fonctions x et y sont dérivables :

$$\begin{cases} x'(t) &= -3\sin t \cos^2 t \\ y'(t) &= 3\cos t \sin^2 t \end{cases}$$

On peut remarquer dès maintenant que $\overrightarrow{(x'(t), y'(t))} = 3\sin t \cos t \overrightarrow{(-\cos t, \sin t)}$ où le vecteur $\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{(-\cos t, \sin t)}$ est unitaire.
Sur l'intervalle d'étude $[0, \frac{\pi}{4}]$, on a $x'(t) \leqslant 0$ et $y'(t) \geqslant 0$, d'où le tableau des variations de x et y

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	$-3\frac{\sqrt{2}}{4}$
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y'(t)$	0	$+$	$3\frac{\sqrt{2}}{4}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$

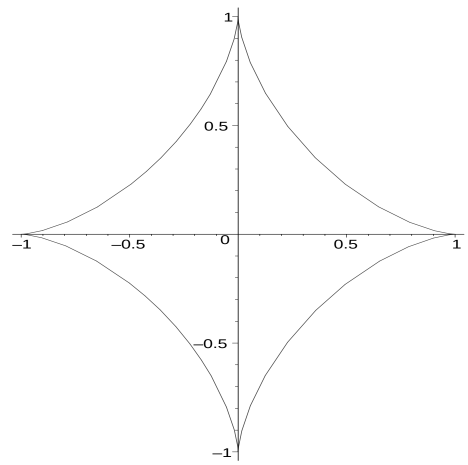
Au point de paramètre $\frac{\pi}{4}$, on a $x'(\frac{\pi}{4}) = -y'(\frac{\pi}{4}) \neq 0$, donc la tangente au point correspondant a pour pente -1 et c'est un point ordinaire. Au point de paramètre $t = 0$, on a $x'(0) = y'(0) = 0$. On peut calculer les dérivées secondes :

$$x''(t) = -3(\cos t \cos^2 t - 2\sin^2 \cos t) = -3\cos t(\cos^2 t - 2\sin^2 t)$$
$$y''(t) = -3(-\sin t \sin^2 t + 2\cos^2 \sin t) = -3\sin t(\sin^2 t - 2\cos^2 t)$$

Donc $x''(0) = -3$ et $y''(0) = 0$. Le vecteur tangent est horizontal et la courbe est au dessus de l'axe des abscisses pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}[$ (d'après le tableau des variations). La symétrie par rapport à l'axe des abscisses montre que le point est un rebroussement de première espèce.
Remarque : On peut aussi faire des développements limités de x et y :

$$\sin^3 t = t^3 - \frac{1}{2}t^5 + \mathrm{O}(t^7)$$
$$\cos^3 t = 1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{8}t^4 + \mathrm{O}(t^6)$$

qui montrent que les vecteurs dérivées second et troisième sont non nuls et non colinéaires.
Compte-tenu des symétries déterminées à la question 1) et de l'étude qui précède on peut tracer la courbe complète.



3) Longueur de la courbe. On calcule

$$\begin{aligned} x'(t)^2 + y'(t)^2 &= 9(\sin^2 t \cos^4 t + \cos^2 t \sin^4 t) \\ &= 9\sin^2 t \cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 9\sin^2 t \cos^2 t \end{aligned}$$

Or, si $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin t$ et $\cos t$ sont positifs. La longueur demandée est donc

$$L = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \; dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{2} \; dt = 3\left[-\frac{\cos(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

Rayon de courbure. Notons $\overrightarrow{\Gamma(t)} = \overrightarrow{(x(t), y(t))}$. Comme on l'a remarqué à la question 2), $\overrightarrow{\Gamma}'(t) = 3\sin t \cos t.\overrightarrow{v(t)}$, où $\overrightarrow{v(t)}$ est un vecteur unitaire tangent à la courbe au point de paramètre t. Le vecteur $\overrightarrow{v'(t)}$ est alors un vecteur unitaire normal au même point. On a donc, si s est une abscisse curviligne :

$$\frac{\overrightarrow{dv(t)}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dv(t)}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{3\sin t \cos t}\overrightarrow{v'(t)}$$

Le rayon de courbure est donc $R(t) = 3\sin t \cos t$.
Remarque : On peut aussi calculer ce rayon avec la formule

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$$

qui donne le même résultat au signe près.

4) La tangente à la courbe au point $M(t)$ a pour équation

$$\big(X - x(t)\big)y'(t) - \big(Y - y(t)\big)x'(t) = 0$$

d'où en tenant compte du fait que $\sin t \cos t \neq 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned} 3\sin t\cos t(X\sin t + Y\cos t) &= 3\sin t\cos t(\sin t\cos^3 t + \sin^3 t\cos t) \\ X\sin t + Y\cos t &= \sin t\cos t \end{aligned}$$

Les points A_t et B_t correspondent respectivement à $X = 0$ et $Y = 0$, soit $A_t = (0, \sin t)$ et $B_t = (\cos t, 0)$. On en déduit aussitôt la longueur du segment A_tB_t

$$\|A_tB_t\| = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Ceci signifie que cette longueur ne dépend pas du point $M(t)$.

Exercice 2

1) Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathcal{P}_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note $Q_1 = f(P_1)$ et $Q_2 = f(P_2)$. On peut donc écrire

$$P_1(X) = a_1X^2 + b_1X + c_1 \qquad P_2(X) = a_2X^2 + b_2X + c_2$$

d'où

$$\Big(P_1 + \lambda P_2\Big)(X) = (a_1 + \lambda a_2)X^2 + (b_1 + \lambda b_2)X + c_1 + \lambda c_2$$

et

$$\begin{aligned} f(P_1 + \lambda P_2)(X) &= \big[(c_1 + \lambda c_2) - (b_1 + \lambda b_2)\big]X^2 + \big[(a_1 + \lambda a_2) - (c_1 + \lambda c_2)\big]X + \big[(b_1 + \lambda b_2) - (a_1 + \lambda a_2)\big] \\ &= (c_1 - b_1)X^2 + (a_1 - b_1)X + (c_1 - a_1) + \lambda(c_2 - b_2)X^2 + \lambda(a_2 - b_2)X + \lambda(c_2 - a_2) \\ &= f(P_1) + \lambda f(P_2) \end{aligned}$$

On constate donc que f est une application linéaire de $\mathcal{P}_2$ dans lui-même.

2) On calcule les images par f des vecteurs de la base. Les composantes de ces images dans la base constituent les colonnes de la matrice $M(f)$.
On obtient $f(1) = X^2 - X$, $f(X) = 1 - X^2$ et $f(X^2) = X - 1$ d'où la matrice annoncée dans le texte.

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Les valeurs propres sont les racines du polynôme en λ : $\det(M(f) - \lambda.\mathrm{Id}) = -\lambda(\lambda^2 + 3)$. Il y a donc 3 valeurs propres distinctes : $0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$ ce qui est une condition suffisante pour que la matrice 3×3, $M(f)$ soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Les vecteurs propres sont obtenus en résolvant les systèmes $M(f)V = \lambda_i V$ avec $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ valeurs propres de la matrice. On obtient, à un scalaire multiplicatif près, les vecteurs propres suivants :

$$\begin{aligned} V_1 &= (1, 1, 1) \quad \text{pour } \lambda = 0 \text{ (évident)} \\ V_2 &= \left(\frac{-1 - i\sqrt(3)}{2}, 1, \frac{-1 + i\sqrt(3)}{2}\right) \quad \text{pour } \lambda = i\sqrt{3} \\ V_3 &= \left(\frac{-1 + i\sqrt(3)}{2}, 1, \frac{-1 - i\sqrt(3)}{2}\right)) \quad \text{pour } \lambda = -i\sqrt{3} \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-i\sqrt(3)}{2} & \frac{-1+i\sqrt(3)}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1+i\sqrt(3)}{2} & \frac{-1-i\sqrt(3)}{2} \end{pmatrix}$$

Remarque : Il y a d'autres expressions possibles pour la matrice de passage suivant les choix des vecteurs propres, définis à un scalaire multiplicatif près et suivant l'ordre des vecteurs choisis. Dans ce dernier cas, la matrice diagonale associée change aussi.
La matrice diagonale correspondante est

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

La relation entre $M(f)$ et P est $D = P^{-1}M(f)P$ où P^{-1} est la matrice inverse de P.

4) On peut calculer P^{-1} avec la comatrice $\widetilde{P}$ de P. On a $\det P = -3i\sqrt{3}$ et

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t\widetilde{P} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ i\sqrt{3}-1 & 2 & -1-i\sqrt{3}) \\ -1-i\sqrt{3} & 2 & i\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$$