UNIVERSITE DE POITIERS **Année 2001-2002**
MATHEMATIQUES **DEUG SM2**

Corrigé du partiel du 27 Mars 2002

Exercice 1 – a. Soit $a_n = \sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$. On a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\sin\frac{1}{n}} \sim \sqrt{1+\frac{1}{n}}\,\frac{n}{n+1}$$

d'où $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, ce qui prouve que le rayon de convergence de la série entière est égal à 1.

Pour la deuxième série, remarquons qu'elle n'a que des coefficients pairs, donc les critères classiques pour calculer le rayon de convergence échouent. On constate qu'elle converge si et seulement si z^2 appartient au domaine de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}Z^n$. Calculons donc le rayon de convergence de cette nouvelle série entière en posant $b_n = \frac{3^n}{n+1}$. L'expression

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{3^{n+1}}{n+2}\,\frac{n+1}{3^n} = 3\frac{n+1}{n+2}$$

admet 3 pour limite quand n tend vers l'infini, ce qui donne un rayon de convergence égal à $R = \frac{1}{3}$. Il résulte de ce calcul que la série initiale converge si $z^2 < \frac{1}{3}$ et diverge si $z^2 > \frac{1}{3}$ d'où son rayon de convergence $r = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Remarque : on peut aussi, comme ci-dessous, poser $X = 3z^2$ et vérifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n+1}$ est 1.

b. Calculons la somme de cette série entière lorsque $|x|$ appartient au domaine de convergence. On peut poser $X = 3x^2$. D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n+1} = s(X)$$

Pour $X \neq 0$, on a $s(X) = \frac{1}{X}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^{n+1}}{n+1}$ et on reconnaît au signe près la série de $\ln(1-X)$

$$-\ln(1-X) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n}$$

d'où aussitôt $s(X) = -\frac{1}{X}\ln(1-X)$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}x^{2n} = -\frac{\ln(1-3x^2)}{3x^2} \qquad (0 < |x| < \frac{\sqrt{3}}{3})$$

Cette fonction se prolonge en 0 par continuité avec la valeur 1.

Exercice 2 – Supposons que la fonction s, développable en série entière de rayon de convergence R non nul, définie par $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, soit solution de l'équation différentielle. On obtient l'égalité pour $|x| < R$

$$x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

d'où

$$-2a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n a_n + 2a_n) x^n = 1$$

$$-2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+1) a_n x^n = 1$$

et en identifiant les coefficients de x^n pour tout n on obtient

$$a_0 = -\frac{1}{2}$$

$$n \geqslant 1 \qquad n(n+1)a_{n+1} - 2(n+1)a_n = 0$$

d'où, pour tout $n > 0$, $a_{n+1} = 2\frac{a_n}{n}$. En particulier $a_2 = 2a_1$. Supposons alors $a_n = 2^{n-1}\frac{a_1}{(n-1)!}$, $n \geqslant 2$ et prouvons que cette relation est encore vérifiée pour a_{n+1}. On a

$$a_{n+1} = 2\frac{a_n}{n} = \frac{2}{n} 2^{n-1} \frac{a_1}{(n-1)!} = 2^n \frac{a_1}{(n)!}$$

donc, si s est solution de l'équation on a nécessairement

$$s(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} a_1}{(n-1)!} x^n = -\frac{1}{2} + a_1 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

et finalement $s(x) = -\frac{1}{2} + a_1 x e^{2x}$. La série de l'exponentielle ayant un rayon de convergence infini, cette fonction est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ pour tout réel a_1.

Exercice 3 – a. La matrice M est orthogonale si et seulement si les 3 vecteurs colonnes forment une base orthonormée. Comme les 2 premiers vecteurs sont normés et orthogonaux, il faut déterminer un vecteur $X = (a, b, c) = ae_1 + be_2 + ce_3$ orthogonal à e_2, donc $b = 0$, et à $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_3)$, donc $a + c = 0$, c'est-à-dire $X = a(e_1 - e_3)$. Ce vecteur est normé si et seulement si $1 = \|Z\|^2 = 2a^2$, donc $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour déterminer le signe on utilise l'hypothèse sur le déterminant, égal à 1. Mais $\det(M) = -\sqrt{2}a$ (avec $c = -a$ et $b = 0$). On en conclut que $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

b. Les vecteurs e_3 et w son normés et orthogonaux. Le produit scalaire de e_3 et v est nul de même que celui de w et v, donc e_3 et w appartiennent à $F = \{v\}^{\perp}$. Comme de plus la dimension de F est 2 (orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension 1), les deux vecteurs w et e_3 forment une base orthonormée de F.

Puisque u est une application linéaire dont la matrice est orthogonale dans la base $\mathcal{B}$, u transforme toute base orthonormée de F en une base orthonormée de $u(F)$. Il suffit donc de choisir $\{u(w), u(e_3)\}$ pour base orthonormée de $u(F)$.

$$\begin{aligned}
u(e_3) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_1 + e_3) \\
u(w) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\big(u(e_1) + u(e_2)\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_3 + e_2\right) \\
&= \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2
\end{aligned}$$

Un vecteur V de composantes (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à F si et seulement si il est orthogonal à $v = e_1 - e_2$, donc si et seulement si son produit scalaire avec v est nul. Il en résulte que

$$< V, v >= x - y = 0$$

est une équation de F. Pour déterminer l'équation de $u(F)$, remarquons que c'est le plan orthogonal au vecteur $u(v)$. Or $u(v) = u(e_1) - u(e_2) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e_1 - e_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}e_3$, d'où une équation de $u(F)$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x - y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$

c. Posons $f(X, Y) = 2X^2 + Y^2 + 2\sqrt{6}XY + X$. Si la courbe d'équation $f(X, Y) = 0$ (conique) a un centre, il est déterminé par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial X}(X, Y) &= 4X + 2\sqrt{6}Y + 1 = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial Y}(X, Y) &= 2Y + 2\sqrt{6}X = 0
\end{aligned}$$

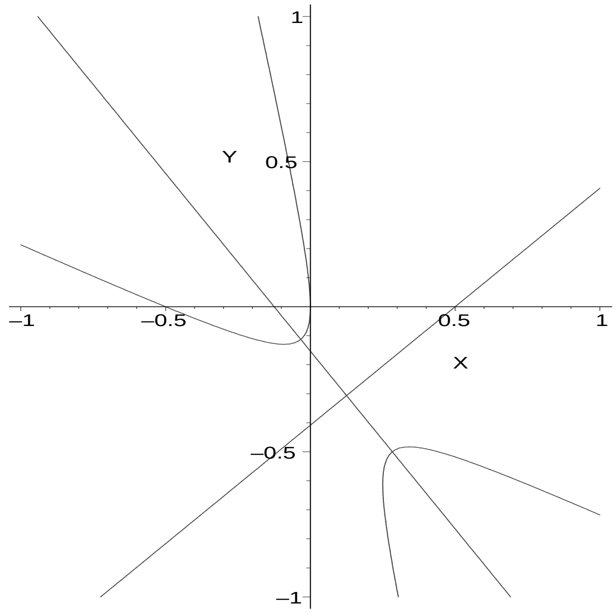
système qui a une solution unique $X_0 = \dfrac{1}{8}$, $Y_0 = -\dfrac{\sqrt{6}}{8}$, représentant les coordonnées du centre de cette conique. Pour déterminer les axes, considérons la matrice symétrique associée à f

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

qui est diagonalisable par une matrice de passage P orthogonale. les axes de la conique sont les directions des vecteurs propres (orthogonaux). On obtient $\det(M - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$. Les vecteurs propres sont (dans la base $\mathcal{B}_1$) : $V_4 = a(3, \sqrt{6})$, $V_{-1} = b(-\sqrt{6}, 3)$, (a et b étant des scalaires). En normant ces vecteurs, on obtient la matrice de passage orthogonale

$$P = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$$

et son inverse $P^{-1} = {}^tP$. Dans le repère déterminé par le centre et les vecteurs propres normés (voir matrice P), l'équation de la conique est de la forme $4X'^2 - Y'^2 + K = 0$, avec $K = f(X_0, Y_0) = \dfrac{1}{16}$. C'est donc une hyperbole.



Représentation graphique de cette hyperbole.