Corrigé du partiel de mars 2004

Exercice 1

On a : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$, la règle de Cauchy prouve que le rayon de convergence de la série entière est $\dfrac{1}{2}$.

Posons $u_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. Il vient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\times\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

La limite de ce quotient quand $n\to\infty$ est 4. La règle de d'Alembert prouve donc que le rayon de convergence de la série entière est $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

1) Si la somme de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ est solution de l'équation, on a (pour x inférieur au rayon de convergence de la série)

$$x\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\Big(n^2a_n+a_{n-2}\Big)x^{n-1}=0$$

D'où la relation de récurrence entre les coefficients :

$$a_1=0\quad;\quad\forall n>1\quad n^2a_n+a_{n-2}=0$$

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{n^2}$$

2) Comme $a_1=0$, la relation ci-dessus prouve aussitôt que $a_{2p+1}=0$ pour $p\geqslant 0$. Pour $n=2p$ (donc pair) on a

$$a_{2p}=\frac{-a_{2(p-1)}}{(2p)^2}=\frac{a_{2(p-2)}}{(2p)^2(2(p-1))^2}=\frac{a_{2(p-2)}}{2^2p^2(2^2(p-1)^2)}=\frac{a_{2(p-2)}}{2^4p^2(p-1)^2}=\frac{-a_{2(p-3)}}{2^6p^2(p-1)^2(p-2)^2}$$

On en déduit alors que

$$a_{2p}=\frac{(-1)^ka_{2(p-k)}}{2^{2k}p^2(p-1)^2\dots(p-k+1)^2}=\frac{(-1)^pa_0}{2^{2p}(p!)^2}$$

La série candidate pour être solution de l'équation est donc

$$y(x)=a_0\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2}x^{2p}$$

Calculons le rayon de convergence de cette série. Comme les coefficients de rang inpair sont absents on peut d'abord étudier la série $\sum\limits_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2}X^p$. La règle de d'Alembert montre immédiatement que le rayon de convergence est infini donc celui de la série $y(x)$ également. Cette fonction (définie à un scalaire multiplicatif près!) s'appelle une fonction de Bessel. Elle ne s'exprime pas à l'aide de fonction classiques.

Exercice 3

Pour calculer ce minimum, on peut considérer l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus 2 sur $[0,1]$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

l'intégrale du texte représente la norme de la fonction $t \mapsto (t^2 - 2(a+b)t + 3a)$. Cette norme est minimum si $t \mapsto 2(a+b)t + 3a$ est la projection orthogonale de la fonction $t \mapsto t^2$ sur le sous espace V de dimension 2 engendré par le 2 fonctions $f_1 : t \mapsto 1$ et $f_t : t \mapsto t$.
Pour calculer cette projection orthogonale, déterminons d'abord une base orthonormée de V. On constate que :

$$\int_0^1 dt = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

Il en résulte aussitôt que $\langle f_1, f_t - \frac{1}{2}f_1\rangle = 0$ et $\|f_t - \frac{1}{2}f_1\|^2 = \int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2 dt = \frac{1}{12}$. On en déduit que f_1 et la fonction $g : t \mapsto 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2})$ forment une base orthonormée de V.
On calcule ensuite la projection orthogonale de $f_{t^2} : t \mapsto t^2$.

$$p_V(f_{t^2}) = \langle f_{t^2}, f_1\rangle f_1 + \langle f_{t^2}, g\rangle g$$

Or,

$$\langle f_{t^2}, f_1\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \qquad ; \qquad \langle f_{t^2}, g\rangle = \int_0^1 2\sqrt{3}(t-\frac{1}{2})t^2 dt = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Donc,

$$p_V(f_{t^2})(t) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}(2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2})) = t - \frac{1}{6}$$

Le minimum de l'intégrale est donc

$$\|f_{t^2} - p_V(f_{t^2})\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt = \int_0^1 (t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3})dt = \frac{1}{180}$$

Les valeurs correspondantes pour a et b sont donc obtenues pour $2(a+b)t - 3a = t - \frac{1}{6}$, d'où en identifiant les coefficients

$$a + b = 1 \qquad \text{et} \qquad 3a = \frac{1}{6}$$

soit $a = \frac{1}{18}$; $b = \frac{4}{9}$.

Exercice 4

a) L'espace est de dimension 3, donc l'orthogonal de V est de dimension 2. On trouve immédiatement 2 vecteurs orthogonaux à V : $w_1 = (1,0,1)$; $w_2 = (-1,1,1)$ linéairement indépendants. De plus ils sont orthogonaux. Une base orthonormée de $V^\perp$ est donc

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$

b) Pour calculer la matrice de la projection orthogonale p sur $V^{\perp}$, on calcule les images des éléments de la base B.

(1) $$p(1,0,0) = \langle (1,0,0), e_1\rangle e_1 + \langle (1,0,0), e_2\rangle e_2 = (\frac{5}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6})$$

(2) $$p(0,1,0) = \langle (0,1,0), e_1\rangle e_1 + \langle (0,1,0), e_2\rangle e_2 = (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

(3) $$p(0,0,1) = \langle (0,0,1), e_1\rangle e_1 + \langle (0,0,1), e_2\rangle e_2 = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6})$$

d'où la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

c) Pour calculer la distance de M au plan $V^{\perp}$ il suffit de calculer la projection orthogonale $p(M)$ de M sur $V^{\perp}$ à l'aide de la matrice P :

$$p(M) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$M - p(M) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et finalement

$$\|M - p(M)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$