Corrigé de l'examen du 21 janvier 2002

Exercice 1 (8 points)– a) Si $(x,y) \in D$, $u = x^2 > 0$ et $v = x - y^2 < x = \sqrt{u}$, donc $T(x,y) = (u,v) \in U$. Pour prouver que T est bijective de D sur U on peut par exemple vérifier que pour tout couple $(u,v) \in U$ il existe un unique couple $(x,y) \in D$ tel que $T(x,y) = (u,v)$. Or si $(u,v) \in U$, on doit avoir $x^2 = u$ et $x > 0$, donc $x = \sqrt{u}$. D'où $\sqrt{u} - y^2 = v$ et $y^2 = \sqrt{u} - v$ donc, puisque $y > 0$, $y = \sqrt{\sqrt{u} - v}$. Le couple $A = (\sqrt{u}, \sqrt{\sqrt{u} - v})$ est donc l'unique élément de D tel que $T(A) = (u,v)$. L'aplication T est bien une bijection.
La matrice jacobienne de T est

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$$

b) Puisque $f = F \circ T$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\frac{\partial F}{\partial u}(x^2, x-y^2) + \frac{\partial F}{\partial v}(x^2, x-y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\frac{\partial F}{\partial v}(x^2, x-y^2)$$

c) On obtient donc, si $u = x^2$, $v = x - y^2$

$$\begin{aligned} 2y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4xy\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) + 2y\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) - 2y\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) \\ &= 4xy\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \end{aligned}$$

d) D'après c) l'équation aux dérivées partielles est équivalente à

$$4xy\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = y$$

et puisque $x > 0,\ y > 0$ et $x = \sqrt{u}$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{4x} = \frac{1}{4\sqrt{u}}$$

ce qui donne immédiatement $F(u,v) = \frac{1}{2}\sqrt{u} + \varphi(v)$ où φ est une fonction arbitraire dérivable. Donc $f(x,y) = \frac{x}{2} + \varphi(x - y^2)$ est la solution générale de l'équation.

e) A l'aide de la solution trouvée en d) on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} + \varphi'(x-y^2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \varphi''(x-y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\varphi'(x-y^2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4y^2\varphi''(x-y^2) - 2\varphi'(x-y^2)$$

Les conditions du texte imposent donc $\varphi''(x-y^2) = 0$, d'où $-2\varphi'(x-y^2) = -2$ et $\varphi'(x-y^2) = 1$ pour tout $(x,y) \in D$, c'est-à-dire que φ' est la fonction constante égale à 1. Il en résulte que $\varphi(t) = t + k$ où k est une constante et finalement $f(x,y) = \frac{x}{2} + (x-y^2) + k$

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x - y^2 + k$$

Exercice 2 (6 points + 1 point)– a) Convergence de l'intégrale. La fonction à intégrer est positive, continue sur $]0,4]$ et bornée sur tout intervalle $[a,4] \subset]0,4]$. Il suffit donc de montrer la convergence de l'intégrale en 0. Or au voisinage de 0 on a

$$\frac{\sqrt{x(4-x)}}{x} = \frac{\sqrt{(4-x)}}{\sqrt{x}} \sim \frac{2}{\sqrt{x}}$$

L'intégrale est de même nature que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, donc convergente (cf. cours).

b) La fonction à intégrer est continue sur $]0,1[$. Lorsque x tend vers 0, on a $\ln(1-x)+x = -x^2 + x^2\varepsilon(x)$ où ε est une fonction admettant une limite nulle en 0. Donc

$$\frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = \frac{-x^2 + x^2\varepsilon(x)}{x^2} = -1 + \varepsilon(x)$$

ce qui assure la convergente de l'intégrale en 0.
D'autre part, pour $1 > x > \frac{1}{2}$, on a

$$\frac{|\ln(1-x)+x|}{x^2} < 4\left(|\ln(1-x)| + 1\right)$$

Pour la convergence en 1 il suffit donc de montrer que $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x)dx$ est convergente ($\ln(1-x)$ est de signe constant sur l'intervalle). Par le changement de variable $u = 1-x$ on est ramené à la convergence de l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^0 \ln(u)du$. Cette dernière intégrale étant convergente (cf. cours), on en déduit que l'intégrale proposée est aussi convergente.

Calcul de l'intégrale convergente. On fixe deux réels $a < b$ de l'intervalle $]0,1[$. Posons $I_{a,b} = \int_a^b \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}dx$. Utilisons une intégration par parties

$$\begin{aligned}
I_{a,b} = \int_a^b \frac{\ln(1-x)+x}{x^2}dx &= \left[-\frac{1}{x}\big(\ln(1-x)+x\big)\right]_a^b - \int_a^b \frac{dx}{1-x} \\
&= \left[-\frac{1}{x}\big(\ln(1-x)+x\big)\right]_a^b + [\ln(1-x)]_a^b \\
&= \frac{\ln(1-a)}{a} - \frac{\ln(1-b)}{b} + \ln(1-b) - \ln(1-a) \\
&= \ln(1-a)\big(\frac{1}{a}-1\big) - \ln(1-b)\big(\frac{1}{b}-1\big) \\
&= \frac{(1-a)\ln(1-a)}{a} - \frac{(1-b)\ln(1-b)}{b}
\end{aligned}$$

Lorsque a tend vers 0, $\frac{\ln(1-a)}{a}$ tend vers -1 (car $\ln(1-a) \sim -a$) et lorsque b tend vers 1, $\lim\limits_{b\to 1}\big((1-b)\ln(1-b)\big) = 0$. Il en résulte aussitôt que $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ b\to 1}} I_{a,b} = -1$, ce qui est la valeur de l'intégrale convergente étudiée.

Exercice 3 (6 points + 2 points)– a) La série est à termes positifs et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$, Le critère de convergence de Cauchy prouve que la série étudiée est convergente.

b) Soit $u_n = \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n!}$. Il vient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2+\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(n)^2+\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)^2+\sqrt{n+1}}{(n)^2+\sqrt{n}}$$

Le second facteur du membre de droite a pour limite 1 quand $n \to \infty$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0 comme $\dfrac{1}{n+1}$. La série (à termes positifs) converge donc d'après le critère de d'Alembert.

c) On peut écrire

$$\frac{n^2+2}{n^2+3n} = \frac{n^2+3n-3n+2}{n^2+3n} = 1 + \frac{-3n+2}{n^2+3n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-3n}{n^2+3n} = 0$ on peut utiliser l'équivalence $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de 0.

$$\ln\left(1+\frac{2-3n}{n^2+3n}\right) \sim \frac{2-3n}{n^2+3n} \sim \frac{-3}{n}$$

La série donnée est à termes négatifs (au moins si n est assez grand) et est de même nature que la série $\sum \dfrac{-3}{n}$ qui est divergente.

d) La série est à termes positifs.

$$v_n = \left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^n - 1 = e^{n \ln \frac{n^3+2}{n^3+1}} - 1$$

et on a

$$\ln\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^3+1}\right) = \frac{1}{n^3+1} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

On obtient alors

$$v_n = e^{\frac{n}{n^3+1}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1 = 1 + \frac{n}{n^3+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1$$

$$v_n = \frac{n}{n^3+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

La série étudiée est de même nature que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$, donc convergente.