Corrigé de l'examen du 3 juin 2003

Exercice 1 – a/ Le vecteur $V = (1, 1, 1)$ est vecteur propre de M de valeur propre 4 car il est immédiat que $MV = (4, 4, 4)$.
b/ La matrice M est symétrique. On sait qu'elle est diagonalisable et qu'il existe une base de vecteurs propres orthogonaux. Ici, les vecteurs W_1 et W_2 sont orthogonaux à V (produit scalaire avec V nul), ils sont linéairement indépendants (car non colinéaires). Or l'orthogonal de V dans $\mathbb{R}^3$ est de dimension 2, il est donc engendré par W_1 et W_2. De plus, le calcul donne $MW_1 = W_1$ et $MW_2 = W_2$. Ces 2 vecteurs sont donc propres pour la même valeur propre 1. Il en résulte que la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $V,\ W_1,\ W_2$ permet de diagonaliser M. Soit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}MT$.

c/ Une matrice est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs V et W_1 sont orthogonaux. Cherchons un troisième vecteur dans le sous-espace propre de valeur propre 1 et orthogonal à W_1. Il peut être choisi de la forme $W_3 = W_1 + aW_2$, d'où $0 = W_1.W_1 + aW_2.W_1 = (1 + a) + 1$. On en déduit $a = -2$ et $W_3 = (-1, 2, -1)$. La matrice orthogonale cherchée (non unique !), une fois les vecteurs colonnes normés, a pour expression

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

Ensuite, puisque P est orthogonale, son inverse est égale à sa transposée. D'où

$$^tPMP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

d/-i Vérification immédiate.

d/-ii On peut poser $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. On a donc $X'(t) = M.X(t) = TDT^{-1}X(t)$ si et seulement si (x, y, z) est solution du système S_0. Posons $Z(t) = T^{-1}X(t)$, qui vérifie donc

$Z'(t) = T^{-1}X'(t) = DZ(t)$. Si $Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$ on en déduit aussitôt le système

$$\begin{cases} z_1'(t) = 4z_1(t) \\ z_2'(t) = z_2(t) \\ z_3'(t) = z_3(t) \end{cases}$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} z_1(t) = c_1e^{4t} \\ z_2(t) = c_2e^t \\ z_3(t) = c_3e^t \end{cases}$$

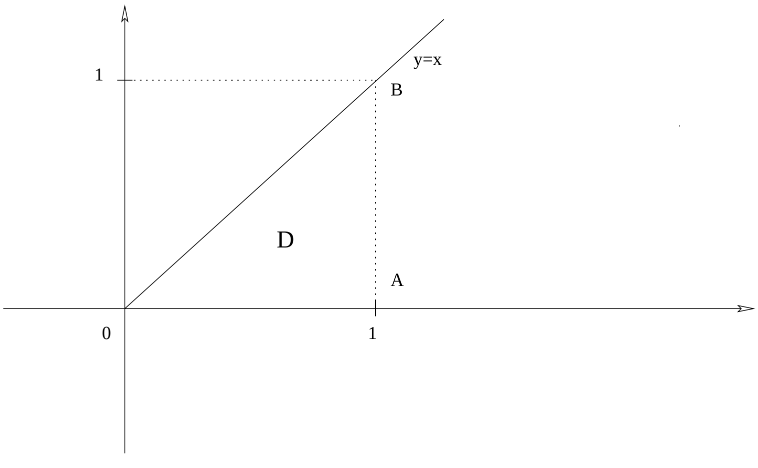
et finalement

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = T.Z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{4t} \\ c_2e^t \\ c_3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{4t} + (c_2 + c_3)e^t \\ c_1e^{4t} - c_3e^t \\ c_1e^{4t} - c_2e^t \end{pmatrix}$$

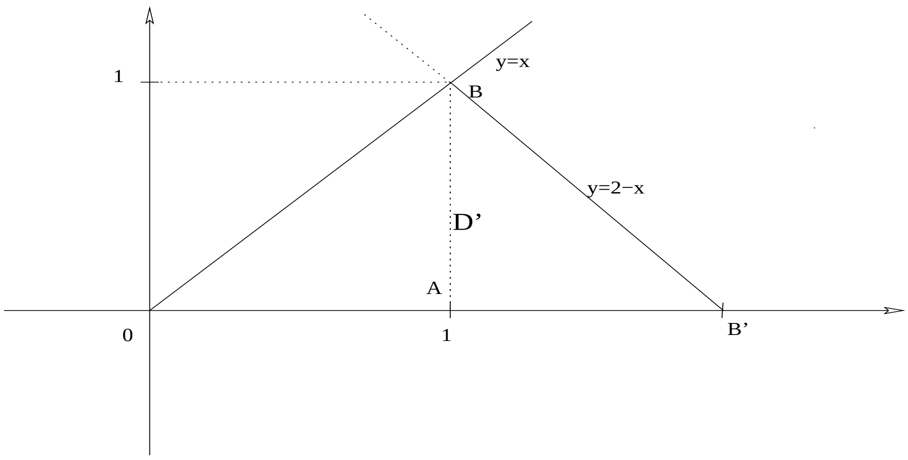
où $c_1,\ c_2,\ c_3$ sont des constantes arbitraires. On obtient toutes les solutions du système S en ajoutant la solution particulière trouvée en **d-i**.

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{4t} + (c_2 + c_3)e^t + 2t \\ y(t) = c_1e^{4t} - c_3e^t + 1 \\ z(t) = c_1e^{4t} - c_2e^t \end{cases}$$

Exercice 2 – a/ Représentation de D :



b/ Le changement de variables proposé est linéaire et le jacobien $|J| = 2$ donc $dxdy = \dfrac{1}{2}dudv$. Le domaine D étant triangulaire, il est transformé en un domaine triangulaire T par le changement de variables linéaire. On détermine les sommets de T par transformation des sommets de D. $O \mapsto O$, $A = (1, 0) \mapsto A' = (1, 1)$ et $B = (1, 1) \mapsto B' = (2, 0)$.



On a donc

$$I = \iint_D (x+y)e^{x-y}dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D'} ue^v dudv$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 (\int_v^{2-v} ue^v du)dv$$

Mais

$$\int_v^{2-v} udu = 2-2v$$

donc

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 e^v(2-2v)dv = [(1-v)e^v]_0^1 + \int_0^1 e^v dv = e-2$$

Exercice 3 – Par définition, le travail de $\overrightarrow{W}$ le long du cercle est

$$T_C = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{W}.\overrightarrow{C'(t)}dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = 2\pi$$

Si le champ dérivait d'un potentiel, ce travail serait nul car le cercle est une courbe fermée ($C(0) = C(2\pi)$).

b/ On a

$$\text{Rot}\overline{V} = \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(y+xz)}{\partial z}, \frac{\partial(x+yz)}{\partial z} - \frac{\partial(xy)}{\partial x}, \frac{\partial(y+xz)}{\partial x} - \frac{\partial(x+yz)}{\partial y}\right) = (0,0,0)$$

Le champ de vecteur V défini sur $\mathbb{R}$, dont le rotationnel est nul, dérive d'un potentiel.
c/ Le potentiel f de $\overline{V}$ est unique à une constante additive près et vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x+yz \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y+xz \\ \frac{\partial f}{\partial z} = xy \end{cases}$$

d'où $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz + g_1(y,z) = \frac{y^2}{2} + xyz + g_2(x,z) = xyz + g_3(x,y)$ et donc $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xyz + \lambda$ où λ est une constante. Mais comme $f(0,0,0) = 0$ on a

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xyz$$

d/ Le champ de vecteurs dérive d'un potentiel f, donc le travail est égal à la différence de potentiel entre les points extrémité et origine, soit

$$\begin{aligned} T_\Gamma &= f\left(\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}), \frac{\pi}{4}\right) - f(1,0,0) \\ &= f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}) - f(1,0,0) = (\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

On peut aussi calculer ce travail directement

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(\cos t + t\sin t)(-\sin t) + (\sin t + t\cos t)\cos t + \cos t \sin t\right] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t) dt \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$