Corrigé de l'examen du 24 juin 2004

Exercice 1

La fonction à intégrer est continue sur l'intervalle $]0, \infty[$. Au voisinage de 0 elle est positive et on a $\sin x \sim x$ et $\ln(1+x) \sim x$. Il en résulte que

$$\frac{(\sin x) \cdot \ln(1+x)}{x^2} \sim 1$$

Elle admet donc 1 pour limite en 0 ce qui assure que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(\sin x) \cdot \ln(1+x)}{x^2} dx$$

est convergente (absolument convergente).

Lorsque x tend vers $+\infty$, on sait que $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$. D'autre part, $|\sin x| \leqslant 1$, donc si x est assez grand on a

$$\left| \int_0^1 \frac{(\sin x) \cdot \ln(1+x)}{x^2} dx \right| \leqslant \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

On sait que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est convergente. Donc l'intégrale du texte est convergente en $+\infty$ et par suite l'intégrale est convergente sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2

a) On a $\det(M - xI) = -x^3 + 3x^2 + 6x - 8 = (x-1)(x+2)(4-x)$. Il y a 3 valeurs propres distinctes 1, -2 et 4 : la matrice M est donc diagonalisable.

b) On calcule 3 vecteurs propres associés aux valeurs propres.

$$V_1 = (2, 2, 1) \quad ; \quad V_{-2} = (1, 0, 2) \quad ; \quad V_4 = (0, -1, 1)$$

La matrice de passage P correspondante est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $P^{-1}MP$ est diagonale et

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque : l'inverse de P (non demandée...) est

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

a) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2-y^2)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 1-2yf'(x^2-y^2)$ d'où

$$y\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2yxf'(x^2-y^2) + x\left(1-2yf'(x^2-y^2)\right) = x$$

b) Soit $x > 0$ et $x > y$. Alors

$$G(x^2-y^2,y) = g(\sqrt{(x^2-y^2)+y^2},y) = g(x,y)$$

Il en résulte

$y\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y(2x\dfrac{\partial G}{\partial X}(x^2-y^2,y))$; $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = x(-2y\dfrac{\partial G}{\partial X}(x^2-y^2,y)) + \dfrac{\partial G}{\partial Y}(x^2-y^2,y)$

Comme g vérifie l'équation du texte on obtient

$$x = y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = x\frac{\partial G}{\partial Y}(x^2-y^2,y)$$

c) Puisque $x > 0$ le résultat précédent donne

$$\frac{\partial G}{\partial Y}(x^2-y^2,y) = 1$$

La fonction G ne dépend donc que de la deuxième variable, d'où l'existence d'une fonction φ dérivable telle que

$$G(X,Y) = Y + \varphi(X)$$

d'où

$$G(x^2-y^2,y) = y + \varphi(x^2-y^2)$$

Donc, $g(x,y) = y + \varphi(x^2-y^2)$.