**Corrigé de l'examen du 20 janvier 2003**

**Exercice 1** – (5 points). Calculons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!} \times \frac{(2n)!}{n!} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)}$$

La limite de ce rapport est nulle lorsque $n$ tend vers l'infini, la série est donc convergente d'après la règle de d'ALEMBERT.

. La suite $|v_n| = \dfrac{1}{(\ln n)^{\frac{1}{3}}}$ est décroissante. En effet, les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ sont croissantes. De plus cette suite a une limite nulle. De cela il résulte que la série $\sum v_n$ est convergente d'après le critère des séries alternées.

. Pour étudier la série $\sum w_n$, à termes postifs, on peut écrire

$$w_n = \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$$

et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(n+2)} = 0$, on peut écrire un développement limité

$$w_n = \sqrt{n} \left(\frac{1}{n(n+2)} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{1}{\sqrt{n}(n+2)} + o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

donc la suite $w_n$ est équivalente à $\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ lorsque $n \to \infty$, d'où la convergence de la série $\sum w_n$.

**Exercice 2** (5 points) On étudie les 2 bornes de l'intégrale (la fonction à intégrer est continue sur $]0, \infty[$). En 0 le développement limité de $\sin t$ permet d'écrire

$$\frac{t - \sin t}{t^3} = \frac{t - (t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4))}{t^3} = \frac{1}{6} + o(t)$$

cette fonction a donc pour limite $\dfrac{1}{6}$ en 0, ce qui assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t - \sin t}{t^3} dt$.
Pour la borne infinie, on peut remarquer que si $t > 1$, alors $|t - \sin t| \leqslant t + 1$ et

$$\left|\frac{t - \sin t}{t^3}\right| \leqslant \frac{t+1}{t^3} \sim \frac{1}{t^2}$$

Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{t - \sin t}{t^3} dt$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$, donc (absolument) convergente.

**Exercice 3** (6 points). La fonction à intégrer est continue et positive sur $[1, +\infty[$, nulle en 1. L'intégrale est donc convergente en 1. La limite quand $x \mapsto \infty$ de $\dfrac{\ln x}{x^a}$ est nulle pour tout $a > 0$, donc si $x$ est assez grand, $\dfrac{(\ln x)^2}{x^{\frac{2}{3}}} < 1$. Il en résulte que pour tout $x$ supérieur à un certain nombre $A > 0$, on a

$$0 \leqslant \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2} \leqslant \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1 + x^2} \sim \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

Or on sait que l'intégrale $\int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$ est convergente (car $\frac{4}{3} > 1$), donc l'intégrale étudiée est convergente.

Pour étudier la série proposée, on peut comparer avec l'intégrale précédente. Pour cela il suffit de montrer que la fonction $f\ : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}$ est décroissante. On calcule la dérivée de cette fonction

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x(1+x^2)^2}\big(1 + x^2(1-\ln x)\big)$$

Mais $(1-\ln x)$ est négatif pour $x > e$ donc quand $x$ tend vers l'infini $(1 + x^2(1-\ln x)) < 0$. Il en résulte que $f'(x) < 0$ pour $x > e$ et $f$ est bien décroissante. La série est de même nature que l'intégrale, c'est à dire convergente.

Remarque : on pouvait, bien que l'énoncé ne suggérait pas cette méthode, faire une majoration analogue à celle faite pour l'intégrale.

**Exercice 4** (2 points + 4 points) a) Calcul des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y} - e^{-x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y} - e^{-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{x+y} + e^{-x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{x+y} + e^{-y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^{x+y}$$

b) Si $f$ admet un extremum local en un point $(x_0, y_0)$, les 2 dérivées partielles premières sont nulles en ce point, ce qui signifie

$$e^{x+y} = e^{-x} \qquad e^{x+y} = e^{-y}$$

Ceci entraîne immédiatement $e^{-x} = e^{-y}$ et $x = y$. En reportant dans une de équations on obtient : $e^{x+x} = e^{-x}$ puis $x = y = 0$. Pour déterminer la nature du point $O = (0,0)$ on évalue les dérivées secondes :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2\ ; \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2\ ; \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

La quantité $s^2 - rt = -3$ est négative et $r > 0$. Il s'agit donc d'un minimum relatif et $f(0,0) = 3$.

c) Pour $y$ fixé, on considère la fonction $x \mapsto g(x) = f(x,y)$. On a $g'(x) = e^{x+y} - e^{-x}$. On constate que $g'(x) = 0$ si et seulement si $e^x e^y = e^{-x}$ soit $e^{-2x} = e^y$, c'est-à-dire pour $x = -\frac{y}{2}$. Comme la limite en $\pm\infty$ de $g$ est infinie, l'extremum ne peut être qu'un minimum global (signe de la dérivée !) $h(y) = g(-\frac{y}{2}) = 2e^{\frac{y}{2}} + e^{-y}$. Le minimum global de $f(x,y) = g(x)$ est obtenu pour le minimum de $h(y)$. On a $h'(y) = e^{\frac{y}{2}} - e^{-y}$. Cette quantité ne s'annule que pour $\frac{y}{2} = -y$, qui correspond à un minimum (voir encore les limites à l'infini), c'est-à-dire $y = 0$. La fonction $f$ admet donc un minimum global 3 en $(0,0)$.

d) Application : Compte tenu des données, le volume de la boîte est $V = Llh = 1$ et la somme des aires des faces $S = 2(Lh + Ll + hl)$ d'où en fonction de $L, l$

$$S = 2(Ll + \frac{1}{L} + \frac{1}{l})$$

Comme $L$ et $l$ sont positifs, il existe un couple unique $(x,y)$ tel que $L = e^x$ et $l = e^y$. On en déduit que l'aire $S$ est minimum si et seulement si

$$2(Ll + \frac{1}{L} + \frac{1}{l}) = 2(e^{x+y} + e^{-x} + e^{-y})$$

est minimum. L'étude en b) et c) prouve alors que ce minimum est obtenu pour $x = y = 0$ soit $L = l = 1$ et par suite $h = \dfrac{V}{Ll} = 1$. La boîte utilisant le minimum de métal devra donc être cubique de côté 1.