Corrigé de l'examen du 3 juin 2002

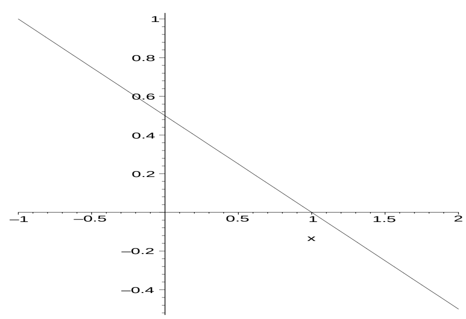
Exercice 1 (5 points)– a)
On considère l'intégrale

$$I = \iint_D \sin(x+2y)dxdy$$

où D est le l'ensemble

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x + 2y < 1\}$$

a – Représenter graphiquement l'ensemble D.
[Réponse : C'est l'intérieur du triangle représenté ci-dessous

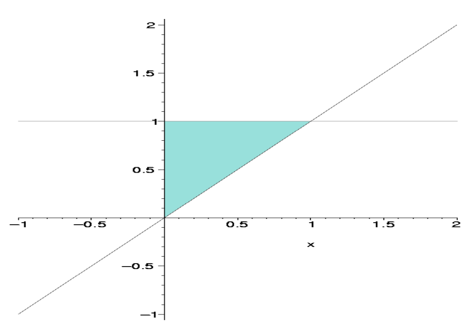


]

b – On note T la transformation du plan qui à (x,y) associe $T(x,y) = (u,v)$, $u = x$ et $v = x + 2y$. Déterminer l'ensemble $\Delta = T(D)$ et le représenter graphiquement.
[Réponse : T est une transformation linéaire. Le triangle représentant le domaine D est donc transformé en un triangle Δ dont les sommets (resp. les côtés) sont les images des sommets (resp. des côtés) de D.

$$O = (0,0) \mapsto T(O) = (0,0)$$
$$A = (1,0) \mapsto T(A) = (1,1)$$
$$B = (0,\frac{1}{2}) \mapsto T(B) = (0,1)$$

d'où la représentation graphique de $T(D)$



]

c – Calculer l'intégrale I en utilisant le changement de variables T de D sur Δ.

[Réponse : Pour calculer l'intégrale I on utilise le changement de variables linéaire (bijectif) T, transformant D en Δ. On a $\det T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ donc, en utilisant le théorème de Fubini il vient :

$$\begin{aligned} \iint_D \sin(x+2y)dxdy &= \iint_{T(D)} \sin(v)\frac{1}{2}dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_u^1 \sin(v)dv\Big)du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \big[-\cos v\big]_u^1 du = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos u - \cos 1 du \\ &= \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1) \end{aligned}$$

]

Exercice 2 – **a)** Résoudre le système différentiel

$$S_1 = \begin{cases} z_1'(t) = -z_1(t) - 5t^2 - 8t \\ z_2'(t) = 5z_2(t) + 5t^2 - 4t \end{cases}$$

(On remarquera qu'il existe une solution particulière de chacune des équations qui est un polynôme de degré 2).

[Réponse : On cherche une solution particulière de chacune des équations sous la forme d'un polynôme de degré 2, et par identification des coefficients on trouve

$$Z_1(t) = -2 + 2t - 5t^2 \quad ; \quad Z_2(t) = \frac{2}{25} + \frac{2}{5}t - t^2$$

Les solutions (évidentes) des équations homogènes sont $z_1(t) = k_1 e^{-t}$, $z_2(t) = k_2 e^{5t}$ (k_1 et k_2 sont des constantes), d'où les solutions du système S_1

$$S_1 = \begin{cases} z_1(t) = k_1 e^{-t} - 2 + 5t - 5t^2 \\ z_2(t) = k_2 e^{5t} + \frac{2}{25} + \frac{2}{5}t - t^2 \end{cases}$$

]

b. On considère le système différentiel

$$S_2 = \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - 12t \\ y'(t) = 8x(t) + 3y(t) + 30t^2 \end{cases}$$

Résoudre le système S_2. [On pourra ramener la résolution du système S_2 à celle de S_1].

[Réponse : Pour ramener la résolution de S_2 à celle de S_1, on écrit le système S_2 sous forme matricielle

(1) $$X' = MX + B$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -12t \\ 30t^2 \end{pmatrix}$. La matrice M est diagonalisable : $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Posons $Z = P^{-1}X$. Il vient, en multipliant les 2 membres de (1) à gauche par P^{-1} :

$$\begin{aligned} Z' = P^{-1}X' &= P^{-1}(PDP^{-1})X + P^{-1}B \\ &= DZ + P^{-1}B \end{aligned}$$

On constate que $P^{-1}B = \begin{pmatrix} -8t - 5t^2 \\ 5t^2 - 4t \end{pmatrix}$, ce qui fait que le système $Z' = DZ + P^{-1}B$ n'est autre que le système S_1. Donc, $X = PZ$

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1e^{-t} - 2 + 2t - 5t^2 \\ k_2e^{5t} + \dfrac{2}{25} + \dfrac{2}{5}t - t^2 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système S_2 sont donc

$$\begin{cases} x(t) &= k_1e^{-t} + k_2e^{5t} - \dfrac{48}{25} + \dfrac{12}{5}t - 6t^2 \\ \\ y(t) &= -2k_1e^{-t} + 4k_2e^{5t} + \dfrac{108}{25} - \dfrac{12}{5}t + 6t^2 \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes arbitraires]

d. Trouver les solutions de S_2 vérifiant : $x(0) = 0;\ x'(0) = 0$.
[Réponse : Les conditions $x(0) = x'(0) = 0$ donnent les 2 équations :

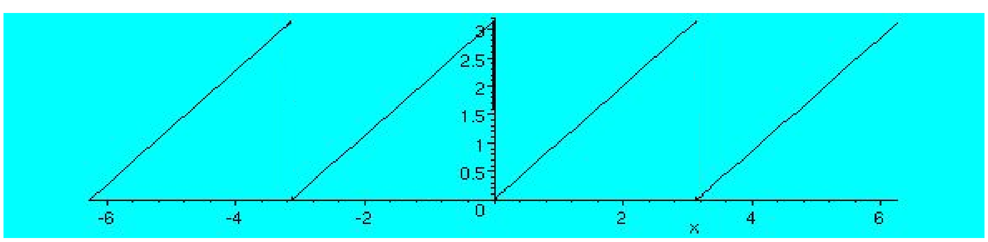
$$\begin{cases} k_1 + k_2 &= \dfrac{48}{25} \\ -k_1 + 5k_2 &= -\dfrac{12}{5} \end{cases}$$

d'où $k_1 = 2,\ k_2 = -\dfrac{2}{25}$ et l'unique solution du système correspondant à ces valeurs des constantes.]

Exercice 3 – Soit f la fonction $2\pi-$périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi[\\ x + \pi & \text{si } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

a. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi[$.
[Réponse : Représentation graphique



]

b. Calculer les coefficients de Fourier de f (on distinguera n pair et n impair).
[Réponse : Coefficients de Fourier de la fonction :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)dx + \int_0^{\pi} xdx\Big) = \frac{\pi}{2}$$

Pour $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} xe^{-inx}dx\Big)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{xe^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{-in}e^{-inx}dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi e^{-in\pi}}{-in} - \frac{-\pi e^{in\pi}}{-in}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{0}\\
&= \frac{(-1)^n}{-in} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^n}{-in}\right)\\
&= \frac{i}{2n}(1+(-1)^n)
\end{aligned}$$

On peut donc dire que pour n impair, $c_n = 0$ et pour n pair non nul, $c_n = \frac{i}{n}$.]

c. Justifier la convergence de la série de Fourier en $x = \frac{\pi}{4}$ et en déduire que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$$

[Réponse : La fonction f est de classe C^1 par morceaux. Elle est continue sur l'intervalle $]0,\pi[$, donc le théorème de Dirichlet assure la convergence de la série de fourier au point $x = \frac{\pi}{4}$. Puisque $c_{2k+1} = 0$ pour tout k,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= c_0 + \lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{k=-N,\dots,N\\ k\neq 0}} c_{2k}\ e^{i2k\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{\pi}{2} + \lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{k=-N,\dots,N\\ k\neq 0}} \frac{i}{2k}\ e^{\frac{ik\pi}{2}}\\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2k}\ e^{\frac{ik\pi}{2}} + \frac{i}{-2k}\ e^{\frac{-ik\pi}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Comme $e^{\frac{ik\pi}{2}} = i^k$ et $i^k = i^{-k}$ pour k pair, $i^{2p+1} = i(-1)^p$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} + i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i^k}{2k} - \frac{i^{-k}}{2k}\right)\\
&= \frac{\pi}{2} + i\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{i^{2p+1}}{2(2p+1)} - \frac{i^{-(2p+1)}}{2(2p+1)}\right)\\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{i^{2p}}{2(2p+1)} + \frac{i^{-(2p)}}{2(2p+1)}\right)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^p + (-1)^p}{2(2p+1)} \right)$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

]