Contrôle du 10 mars 2004
(14 heures – 16 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1
Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

Exercice 2
On donne l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0$$

1) On cherche une solution développable en série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0.
Trouver une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n si une telle solution existe.
2) Déterminer les coefficients a_n et vérifier que la série trouvée est effectivement solution de l'équation.

Exercice 3
Calculer le minimum de l'intégrale

$$\int_0^1 (t^2 - 2(a+b)t + 3a)^2 dt$$

pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et les valeurs de a et b qui réalisent ce minimum.

Exercice 4
On considère l'espace $E = \mathbb{R}^3$ euclidien muni de sa base orthonormée usuelle

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

On note $V = (1,2,-1) \in E$.

a) Déterminer une base orthonormée de l'orthogonal $V^\perp$ de V.

b) Calculer la matrice dans la base B de la projection orthogonale sur $V^\perp$.

c) Calculer la distance du point $M = (2,1,2)$ au plan $V^\perp$.