Examen du 4 septembre 2003
(14 heures – 18 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Questions de cours (5 points) Calculer, avec toutes les justifications nécessaires, le développement limité de $\arctan x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

Exercice (4 points) Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$$

Problème (11 points) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Les vecteurs de la base canonique sont notés $\{e_1, e_2, e_3\}$. On étudie l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I l'application identique de $\mathbb{R}^3$ et de la même manière la matrice de cette application. On notera $f^0 = I$ (resp. $M(f)^0 = I$) et $f^n = f \circ f^{n-1}$ (resp. $M(f)^n = M(f).M(f)^{n-1}$).

1) Calculer les vecteurs $f(e_1),\ f(e_2),\ f(e_3)$ en utilisant la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de la matrice $M(f)$ (ou le rang de f).

2) Calculer $M(f)^2$ et en déduire deux nombres a et b tels que

$$f^2 = af + bI$$

3) En utilisant la question **2**, calculer f^3 comme combinaison linéaire de f et I et montrer de même qu'il existe des nombres a_n et b_n, que l'on ne cherchera pas à calculer dans cette question, tels que

$$f^n = a_n f + b_n I$$

(on donnera des relations de récurrence entre $a_n,\ b_n$ et $a_{n-1},\ b_{n-1}$.)
On remarquera que l'on a aussi $M(f)^n = a_n M(f) + b_n I$.

4) Prouver que $(b_n - a_n) = (a_{n-1} - b_{n-1}) = (-1)^n$.

5) On pose $E_1 = (1, -1, 0),\ E_2 = (1, 0, -1),\ E_3 = (1, 1, 1)$. Vérifier que $\mathcal{B} = \{E_1,\ E_2,\ E_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice $N(f)$ de f dans cette base.

6) Calculer la matrice de f^n dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire que

$$a_n = \frac{1}{3}\big(2^n - (-1)^n\big) \qquad b_n = \frac{1}{3}\big(2^n + 2(-1)^n\big)$$

7) Soit t un nombre réel. On pose

$$A(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n \frac{t^n}{n!} \qquad B(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} b_n \frac{t^n}{n!}$$

Calculer $A(t)$ et $B(t)$.

$\left[\text{\textit{On utilisera sans démonstration le fait que pour tout } } x \text{ \textit{réel}}, e^x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}\right]$

8) On note $g(t)$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que

$$g(t) = A(t)f + B(t)I$$

Montrer que pour tous réels t, s on a $g(t+s) = g(t) \circ g(s)$.