Examen du 28 mars 2002
(8 heures 30 – 11 heures 30)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Question de cours
Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme P soit divisible par $(X-a)$.
Énoncer le théorème plus général donnant les relations entre l'ordre d'une racine a d'un polynôme P, les racines de ses polynômes dérivés et la factorisation de P par des puissances de $(X-a)$.
Application : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 - 4X^4 + 14X^2 - 17X + 6$ en remarquant que 1 est racine P.

Exercice
Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin^2 x)}dx$

Problème
On considère pour tout $n > 0$ la fonction f_n définie par

$$x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n e^{-x}$$

I-a. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$$

Montrer que pour tout $n > 0$, $F_n(x) = nF_{n-1}(x) - f_n(x)$.
b. En déduire que

$$F_n(x) = n!\left(1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right)$$

c. Pour n fixé, calculer $L_n = \lim\limits_{x\to\infty} F_n(x)$.

II-a. On pose $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x$ et $\Delta_n(x) = f_n(n+x) - f_n(n-x)$.
Montrer que pour tout $n > 0$ et $x \in]0, n[$

$$\Delta_n(x) = (n-x)^n e^{n-x}\left(e^{n\varphi(\frac{x}{n})} - 1\right)$$

b. Prouver que pour tout $x \in]0, 1[$ on a $\varphi(x) > 0$.
c. Déduire de **a.** et **b.** que $\Delta_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, n]$.
d. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \geqslant 2n, \qquad \int_n^{2n} f_n(t)dt \leqslant \int_n^x f_n(t)dt$$

$$\int_0^n f_n(t)dt \leqslant \int_n^{2n} f_n(t)dt$$

[pour la deuxième inégalité on pourra d'abord montrer que $\int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^n f_n(n+t)dt$ et utiliser **c.**]

III-a. En utilisant les parties **I** et **II**, montrer que :
(i) $\displaystyle\int_n^{2n} f_n(t)dt \leqslant L_n - F_n(n)$
(ii) $2F_n(n) \leqslant L_n$
b. Démontrer que l'on a l'encadrement

$$\frac{1}{2}e^n \leqslant 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} < e^n$$