Contrôle du 26 mars 2003
(14 heures – 16 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Questions de cours (2 points) et **Exercice** (3 points)

Énoncer la définition d'une famille libre $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Prouver que si $a \neq b$, les polynômes $A(X) = X - a$, $B(X) = X - b$ et $C(X) = X^2 + 1$ sont linéairement indépendants.
On considère un polynôme $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ de degré au plus 2. Montrer qu'il existe des scalaires, u, v et w, tels que $P(X) = uA(X)+vB(X)+wC(X)$ et les calculer.

Problème (15 points)

1. – On note $P(X)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de degré $k > 1$ et on note $P'(X)$ son polynôme dérivé. On pose

$$R(X) = X - \frac{P(X)}{P'(X)}$$

et on suppose que $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)\cdots(X - z_k)$, où tous les nombres $z_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, k$ sont distincts.

1.a) – Calculer $P(z_i)$, pour tout $i = 1, \dots, k$ et démontrer que $P'(z_i) \neq 0$.

1.b) – Calculer $R(z_i)$ et $R'(z_i)$ pour tout $i = 1, \dots, k$ ($R'(X)$ désigne la fraction rationnelle dérivée de R).

1.c) – Montrer que $R(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$ où $A(X)$ et $B(X)$ sont des polynômes vérifiant $\deg A = \deg B + 1$.

2) – On considère désormais une fraction rationnelle $R(X) = \dfrac{Q(X)}{S(X)}$ irréductible telle que $k = \deg Q > \deg S$. On suppose de plus qu'il existe des nombres $z_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, k$ distincts, tels que

$$\forall i = 1, \dots, k \qquad R(z_i) = z_i, \quad R'(z_i) = 0 \tag{1}$$

2.a) – On pose $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)\cdots(X - z_k)$. Prouver que

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{X - z_i} \tag{2}$$

2.b) – Prouver que pour tout $i = 1, \dots, k$, $S(z_i) \neq 0$, puis que z_i est racine simple du polynôme $Q(X) - XS(X)$. En déduire que pour tout $i = 1, \dots, k$, z_i est pôle simple de la fraction

$$F(X) = \frac{1}{R(X) - X}$$

2.c) – En déduire qu'il existe des constantes a_i, $i = 1, \dots, k$ telles que

$$F(X) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{X - z_i}$$

2.d) – Montrer que $a_i = -1$, pour tout $i = 1, \dots, k$.

2.e) – Déduire des questions précédentes que

$$R(X) = X - \frac{P(X)}{P'(X)}$$

3) Application : montrer qu'on peut appliquer le résultat de la question **2** à la fraction

$$R(X) = \frac{2X^3}{3X^2 - 1}$$

et donner la décomposition en éléments simples de

$$\frac{3X^2 - 1}{X^3 - X}$$