Contrôle du 11 mars 2004
(14 heures – 16 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Question de cours (4 points)
1) Ecrire la définition d'une famille $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ de n vecteurs linéairement indépendants d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.
2) Les trois vecteurs $V_1 = (1, 2, 3)$, $V_2 = (0, -1, 2)$, $V_3 = (-1, 1, 0)$ sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice (4 points)
Il s'agit de trouver le reste d'une division euclidienne de 2 polynômes sans effectuer cette division.
1) Ecrire la relation de la division euclidienne du polynôme X^n par $(X-1)^3$ où n est un entier supérieur à 3.

2) En évaluant la relation trouvée en 1) pour $X = 1$, écrire une relation entre les coefficients du reste de cette division. En dérivant la relation trouvée en 1), obtenir d'autres relations entre les coefficients du reste puis, déterminer complètement ce reste.

Problème (12 points)
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

1) Déterminer un pgcd de $(X-a)$ et $(X-b)$ où a et b sont deux réels distincts et en déduire un pgcd de $(X-a)^n$ et $(X-b)^n$.

2) En utilisant la relation de Bezout, en déduire qu'il existe 2 polynômes A_n et B_n de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que

$$(X-a)^n A_n + (X-b)^n B_n = 1$$

Démontrer l'unicité du couple $(A_n, B_n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant cette relation.

3) On se propose de résoudre l'équation

$$(X-a)^n U_n + (X-b)^n V_n = 1 \qquad (1)$$

sans condition sur les degrés de U_n et V_n.
Prouver que $B_n - V_n$ est divisible par $(X-a)^n$ et de même $A_n - U_n$ est divisible par $(X-b)^n$.
En déduire que (U_n, V_n) est solution de l'équation (1) si et seulement si
$U_n(X) = A_n(X) + (X-b)^n K(X)$ et $V_n(X) = B_n(X) - (X-a)^n K(X)$ où $K(X)$ est un polynôme quelconque.

4) Trouver A_2 et B_2 lorsque $a = 1$ et $b = -1$.