Examen du 4 juin 2003
(8 heures 30 – 12 heures 30)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Question de cours, exercice (5 points)

a) Résoudre l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = 0$$

b) En utilisant **a)** et la méthode de variation de la constante, résoudre l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

et déterminer la solution y_0 telle que $y_0(1) = \sqrt{2}$.

Problème (15 points)

Dans tout le problème on note $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. La matrice identité est notée I.
On rappelle qu'une base B_n de $\mathcal{M}_n$ (dite base canonique de $\mathcal{M}_n$), est constituée des matrices

$$E_{k,l} = (m_{i,j})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}} \qquad \begin{cases} m_{k,l} = 1 \\ m_{i,j} = 0 \text{ si } (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

(C'est-à-dire que tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne k et colonne l qui vaut 1.)
L'objet du problème est l'étude d'une application linéaire de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$. Dans la partie **A** on étudie le cas $n = 2$ puis le cas général dans la partie **B**.

A – Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$. On pose $\varphi(M) = a + d$.

A.1 – Vérifier que l'application φ de $\mathcal{M}_2$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie, est linéaire. Quelle est la matrice de φ relativement à la base $B_2 = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ de $\mathcal{M}_2$ et la base $\{1\}$ de $\mathbb{R}$?

A.2 – Déterminer l'image et le noyau de φ, ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels. Expliciter une base de $\ker \varphi$ et compléter celle-ci en une base de $\mathcal{M}_2$.

A.3 – Soit $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ une autre matrice de $\mathcal{M}_2$. Calculer $\varphi(MN)$ et $\varphi(NM)$.
En déduire qu'il n'existe pas de couple $(M, N) \in \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2$ tel que $MN - NM = I$.

A.4 – Calculer les produits de matrices $ME_{1,1}$ et $E_{1,1}M$ puis $ME_{1,2}$ et $E_{1,2}M$. En conclure que si $MN = NM$ pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_2$, alors $M = \lambda I$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

B – Dans cette partie la matrice M appartient à $\mathcal{M}_n$.

$$M = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots n}}$$

et on pose $\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (somme des éléments de la diagonale de M).

B.1 – Prouver rapidement que φ est une application linéaire surjective de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de $\ker \varphi$?

B.2 – Expliciter une base du noyau de φ. *[on pourra considérer, en particulier, les matrices $E_{1,1} - E_{i,i}$ pour $i \neq 1$.]*

B.3 – Soient $M = (a_{i,j})_{\substack{i=1\ldots n\\ j=1\ldots n}}$ et $N = (b_{i,j})_{\substack{i=1\ldots n\\ j=1\ldots n}}$. Calculer $\varphi(MN)$ puis démontrer que $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.

B.4 – Soit f une application linéaire de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$ et $M = (a_{i,j})_{\substack{i=1\ldots n\\ j=1\ldots n}} \in \mathcal{M}_n$. Ecrire l'expression de $f(M)$ à l'aide de $f(E_{i,j})$.
En déduire qu'il existe une matrice $A_f \in \mathcal{M}_n$, unique, que l'on explicitera, telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n \qquad f(M) = \varphi(A_f M)$$

B.5 – Vérifier que l'application $\Psi : \ f \mapsto A_f$ est un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n$.

B.6 – En vous inspirant de la méthode utilisée dans la question **A.4**, montrer qu'une matrice M qui commute à toute matrice de $\mathcal{M}_n$ est multiple de I.