Corrigé du partiel 28 mars 2002

Question de cours : Voir le cours.
Application : $P(1) = 0$, $P'(X) = 5X^4 - 16X^3 + 28X - 17$, $P''(X) = 20X^3 - 48X^2 + 28$, $P^{(3)}(X) = 60X^2 - 96X$. On a donc $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$. Le polynôme P est donc divisible par $(X-1)^3$ mais 1 n'est pas divisible par $(X-1)^4$; $P(X) = (X-1)^3 Q(X)$, avec Q de degré 2 et n'ayant pas 1 comme racine. Pour calculer $Q(X)$ on peut effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, ce qui donne $Q(X) = X^2 - X - 6 = (X-3)(X+2)$ et le reste est nul (faire la division). D'où la factorisation de $P(X)$ en facteur de degré 1

$$P(X) = (X-1)^3(X-3)(X+2)$$

Exercice : Notons I l'intégrale à calculer (intégrale d'une fonction continue sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{6}]$). En remarquant que la fonction cosinus est la dérivée de la fonction sinus, le changement de variable $X = \sin x$ est naturel. La fonction $x \to \sin x$ est une bijection dérivable de $[0, \frac{\pi}{6}]$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ (fonction strictement croissante car sa fonction dérivée $x \to \cos x$ est strictement positive sur cet intervalle). La fonction réciproque Arcsin est aussi dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$. Le changement de variable est bien justifié et

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dX}{(1+X)(2+X^2)}$$

On décompose la fraction en éléments simples

$$\frac{1}{(1+X)(2+X^2)} = \frac{\frac{1}{3}}{1+X} + \frac{-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}}{2+X^2}$$

On calcule donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{3}}{1+X} dX = \frac{1}{3}\Big[\ln|1+X|\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 2)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}}{2+X^2} dX = -\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2X}{X^2+2} dX + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dX}{X^2+2}$$

Puis

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2X}{X^2+2} dX + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dX}{X^2+2} &= -\frac{1}{6}\Big[\ln(X^2+2)\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{6}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{6}(\ln\frac{9}{4} - \ln 2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

Finalement, en regroupant ces résultats :

$$I = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 2) - \frac{1}{6}(\ln\frac{9}{4} - \ln 2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$I = \frac{1}{6}\ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Problème. I-a. En effectuant une intégration par parties, on obtient pour $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^n e^{-t} dt &= \left[-t^n e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x n t^{n-1} e^{-t} dt \\
&= -f_n(t) + n\int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt \\
&= nF_{n-1}(x) - f_n(x)
\end{aligned}$$

I-b. Démontrons la formule par récurrence sur n. Pour $n = 0$ on a

$$F_0(x) = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$$

ce qui coïncide avec la formule du texte (pour $n = 0$). Supposons la formule vérifiée pour F_n. Alors, d'après la formule de récurrence et l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= (n+1)F_n(x) - x^{n+1}e^{-x} \\
&= (n+1)(n)!\left(1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right) - x^{n+1}e^{-x} \\
&= (n+1)!\left(1 - e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)\right)
\end{aligned}$$

d'où la formule demandée pour l'indice $n+1$.
Remarque : On peut aussi vérifier que F_n est dérivable et que sa dérivée $F_n' = f_n$, ce qui est aussi la dérivée du membre de droite de la formule. Ensuite $F_n(0) = 0$ termine de prouver l'égalité annoncée.

I-c. Si P est un polynôme, on sait que $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)e^{-x} = 0$ (croissance comparée de l'exponentielle et des polynômes). Il en résulte aussitôt que $\lim\limits_{x\to\infty} F_n(x) = n!$

II-a. On a pour tout $n > 0$ et tout $x \in]0, n[$

$$\begin{aligned}
\Delta_n(x) &= (n+x)^n e^{-(n+x)} - (n-x)^n e^{-(n-x)} \\
&= (n-x)^n e^{x-n}\left(\left(\frac{n+x}{n-x}\right)^n e^{-(n+x)+(n-x)} - 1\right) \\
&= (n-x)^n e^{x-n}\left(e^{n\ln\left(\frac{n+x}{n-x}\right)}e^{-2x} - 1\right) \\
&= (n-x)^n e^{x-n}\left(e^{n\varphi\left(\frac{x}{n}\right)} - 1\right)
\end{aligned}$$

□

II-b. La fonction φ est dérivable sur $]0, 1[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 2 = \frac{2x^2}{1-x^2}$$

donc $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, 1[$. Cette fonction φ est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0, 1[$. Or la limite de $\varphi(x)$ en 0 est nulle en 0, ce qui prouve que φ est strictement positive sur $]0, 1[$.

II-c. Si $x \in]0, n[$, $\frac{x}{n} \in]0, 1[$, donc $\varphi(\frac{x}{n}) > 0$ et par suite $e^{n\varphi(\frac{x}{n})} > 1$. D'autre part, $(n-x)^n > 0$ et $e^{x-n} > 0$ sur ce même intervalle. Il en résulte, d'après la formule du **II-a.** que pour $x \in]0, n[$, $\Delta(x)$ est strictement positif et puisque Δ_n es une fonction continue sur $[0, n]$, on en déduit que $\Delta \geqslant 0$ sur l'intervalle fermé $[0, n]$.

II-d. On peut écrire pour $x > 2n$

$$\int_n^x f_n(t)dt = \int_n^{2n} f_n(t)dt + \int_{2n}^x f_n(t)dt$$

Mais $f_n(t) \geqslant 0$ sur l'intervalle $]2n, x[$ donc $\displaystyle\int_{2n}^x f_n(t)dt \geqslant 0$. l'inégalité demandée en découle aussitôt.
Montrons la seconde inégalité. Pour cela on peut poser $t = n + s$ dans l'intégrale $\int_n^{2n} f_n(t)dt$. Il vient

$$\int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^n f_n(n+s)ds$$

mais on vient de prouver ci-dessus que $\Delta_n(s) = f_n(n+s) - f_n(n-s) \geqslant 0$. On a donc $f_n(n+s) \geqslant f_n(n-s)$ et par suite

$$\int_0^n f_n(n+s)ds \geqslant \int_0^n f_n(n-s)ds$$

En posant cette fois $t = n - s$, il vient

$$\int_0^n f_n(n-s)ds = -\int_n^0 f_n(t)dt = \int_0^n f_n(t)dt$$

Finalement

$$\int_n^{2n} f_n(t)dt \geqslant \int_0^n f_n(t)dt$$

IlI-a. *(i)* D'après **II-b.**, première inégalité, pour tout $x \geqslant 2n$

$$\int_n^{2n} f_n(t) \leqslant \int_n^x f_n(t) = \int_0^x f_n(t) - \int_0^n f_n(t)$$

$$\int_n^{2n} f_n(t) \leqslant \int_0^x f_n(t) - F_n(n)$$

et lorsque $x \to \infty$, le membre de droite a pour limite $L_n - F_n(n)$ (d'après **I-c.**).
(ii) D'après la seconde inégalité de **II-d.** et *(i)*, on a

$$L_n - F_n(n) \geqslant \int_0^n f_n(t)dt = F_n(n)$$

donc $2F_n(n) \geqslant L_n$.

IlI-b. D'après **I-b** (avec $x = n$), **III-a** *(ii)* et **I-a**

$$2n!\left(1 - e^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right)\right) \leqslant n!$$

d'où

$$1 - e^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

et

$$-e^{-n}\left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$$

Finalement,

$$1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} \geqslant \frac{e^n}{2}$$

D'autre part, d'après la formule de Taylor à l'ordre n il existe $c \in [0, n]$ tel que

$$e^n = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

on a donc bien

$$e^n > 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}$$

ce qui termine la démonstration de la double inégalité.