Corrigé du contrôle du 11 mars 2004

Question de cours (4 points)
1) Voir cours.
2) Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$ et trois scalaires tels que

$$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0$$

On en déduit 3 équations linéaires :

$$\begin{cases} \alpha - \gamma & = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma & = 0 \\ 3\alpha + 2\beta & = 0 \end{cases}$$

dont la résolution donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Les 3 vecteurs sont linéairement indépendants.

Exercice (4 points)
1) Soit $n > 3$. La division euclidienne de X^n par $(X-1)^3$ donne 2 polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ tels que $\deg R < 3$ et

$$X^n = (X-1)^3 Q(X) + R(X) \tag{1}$$

2) Comme le polynôme R est de degré au plus 2, il s'écrit $R(X) = aX^2 + bX + c$. Pour $X = 1$, La relation (1) donne donc $R(1) = a + b + c = 1$.
Dérivons les 2 membres de la relation (1) :

$$\begin{aligned} nX^{n-1} &= (X-1)^3 Q'(X) + 2(X-1)^2 Q(X) + R'(X) \\ &= (X-1)^2 Q_1(X) + R'(X) \end{aligned}$$

où $Q'(X)$ et $R'(X) = 2aX + b$ sont les polynômes dérivés de Q et R et $Q_1(X) = (X-1)Q'(X) + 2Q(X)$. Pour $X = 1$ on obtient donc $R'(1) = 2a + b = n$.
De même, en dérivant une seconde fois, on a :

$$n(n-1)X^{n-2} = (X-1)Q_2(X) + R''(X)$$

où R'' est le polynôme constant $2a$, dérivé de R'. Pour $X = 1$ on obtient $n(n-1) = 2a$, d'où $a = \dfrac{n(n-1)}{2}$, ce qui permet de calculer ensuite $b = n - 2a = 2n - n^2$ et $c = 1 - a - b = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$. Le reste de la division est donc

$$R(X) = \frac{n(n-1)}{2}X^2 + (2n - n^2)X + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Problème (12 points)
1) Les polynômes $(X-a)$ et $(X-b)$ sont premiers entre eux si $a \neq b$. Pour le voir, on peut remarquer que ces 2 polynômes étant de degré 1, ils sont irréductibles et $X - a$ ne divise pas $X - b$ si $a \neq b$ (donc ne peut diviser le pgcd.). [on peut aussi utiliser l'algorithme d'EUCLIDE, $X - a = (X - b) + b - a$, donc le pgcd divise $b - a$ qui est constant]. Un pgcd est donc 1.
On en déduit qu'un pgcd. de $(X-a)^n$ et $(X-b)^n$ est aussi 1. En effet, si $n \leqslant 1$, c'est fait, et si $n > 1$, tout diviseur non constant de $(X-a)^n$ est de la forme $(X-a)^k$ avec $k > 0$, donc si le pgcd de $(X-a)^n$ et $(X-b)^n$ avait un degré non nul, alors $(X-a)$ diviserait $(X-b)^n$ donc $(X-b)$, ce qui contredit le début de la question. [On peut aussi raisonner sur les racines éventuelles (dans $\mathbb{C}$) du pgcd et qui seraient aussi racines de $(X-a)^n$ et $(X-b)^n$, d'où contradiction puisque $a \neq b$.]

2) Les 2 polynômes $(X-a)^n$ et $(X-b)^n$ étant premiers entre eux, il existe, d'après la relation de BEZOUT, deux polynômes A_n et B_n de degré au plus $n-1$, tels que :

$$(X-a)^n A_n + (X-b)^n B_n = 1 \tag{2}$$

Prouvons l'unicité de ce couple de polynômes. Soient (A'_n, B'_n) un autre couple avec les mêmes propriétés. De (2) et de la même relation avec (A'_n, B'_n), on déduit par soustraction

$$(X-a)^n(A_n - A'_n) = (X-b)^n(B'_n - B_n)$$

Or, si $B'_n - B_n \neq 0$, $(X-a)^n$, qui est premier avec $(X-b)^n$, divise $B'_n - B_n$ (Théorème de GAUSS). Mais $\deg(B'_n - B_n) < n$ et $(X-a)^n$ est de degré n donc ceci n'est possible que si $(B'_n - B_n) = 0$ d'où aussitôt $(A_n - A'_n) = 0$ pour la même raison et l'unicité est démontrée.

3) On effectue le même calcul que dans 2) :

$$(X-a)^n(U_n - A_n) = (X-b)^n(B_n - V_n) \tag{3}$$

$(X-a)^n$ étant premier avec $(X-b)^n$ divise $B_n - V_n$ (Théorème de GAUSS) d'où $B_n - V_n = (X-a)^n K_1(X)$. Par un argument identique, $(X-b)^n$ divise $U_n - A_n$ donc $U_n - A_n = (X-b)^n K_2(X)$, K_1 et K_2 étant des polynômes à priori différents. Cependant, en reportant ces relations dans l'égalité (3), on a :

$$(X-a)^n(X-b)^n K_2(X) = (X-b)^n(X-a)^n K_1(X) = P(X)$$

d'où $K_1 = K_2$ (quotient de $P(X)$ par $(X-b)^n(X-a)^n$). Si on pose $K = K_1 = K_2$, on obtient

$$\begin{cases} U_n(X) & = A_n(X) + (X-b)^n K(X) \\ V_n(X) & = B_n(X) - (X-a)^n K(X) \end{cases}$$

Réciproquement, si U_n et V_n ont la forme ci-dessus, on vérifie immédiatement la relation

$$(X-a)^n U_n(X) + (X-b)^n V_n(X) = 1$$

4) Les polynômes A_2 et B_2 sont de degré 1, donc de la forme $A_2(X) = aX + b$ et $B_2(X) = cX + d$ et vérifient

$$(X-1)^2(aX+b) + (X+1)^2(cX+d) = 1$$

Il s'agit de trouver a, b, c, d. On peut procéder par identification en cherchant des relations entre les coefficients, par exemple :

$$\begin{aligned} X = 1 &\quad \text{donne} \quad 4(c+d) = 1 \\ X = -1 &\quad \text{donne} \quad 4(-a+b) = 1 \\ X = 0 &\quad \text{donne} \quad b + d = 1 \end{aligned}$$

De plus, en divisant par X^3 et en faisant tendre X vers l'infini, on obtient $a + c = 0$ (on peut aussi dériver la relation). De ces 4 équations on déduit sans difficulté $d = b = \dfrac{1}{2}$ et $a = -c = \dfrac{1}{4}$. On a donc

$$A_2(X) = \frac{1}{4}X + \frac{1}{2} \qquad B_2(X) = -\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$$