Corrigé du contrôle du 26 mars 2003

Questions de cours (2 points) et **Exercice** (3 points)

Soit $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que A est libre si toute combinaison linéaire nulle $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ de ces vecteurs implique $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. On peut aussi dire qu'aucun des vecteurs de A n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de A ou encore que 0 n'est pas combinaison linéaire, à coefficients non tous nuls, de vecteurs de A.
Pour vérifier que les 3 polynômes $A,\ B,\ C$ sont linéairement indépendants, ou constituent une famille libre, considérons trois scalaires $u,\ v,\ w$ tels que $uA(X) + vB(X) + wC(X) = 0$. En développant suivant les puissances de X, on obtient

$$wX^2 + (u+v)X + (w - au - bv) = 0$$

Ce qui entraîne que les coefficients de ce polynôme sont tous nuls. D'où

$$\begin{cases} w & = 0 \\ u + v & = 0 \\ w - au - bv & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

La résolution du système donne la solution unique $w = u = v = 0$. Les polynômes sont bien linéairement indépendants.
Si $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ est un polynôme de degré au plus 2, trouver (u, v, w) tels que P soit combinaison linéaire $P = uA + vB + wC = 0$, revient, en développant comme précédemment, à résoudre le système (1) avec seconds membres α, β, γ au lieu de 0.

$$\begin{cases} w & = \alpha \\ u + v & = \beta \\ w - au - bv & = \gamma \end{cases} \tag{2}$$

celui-ci a une solution unique (car $a \neq b$)

$$u = \frac{\alpha - b\beta - \gamma}{a - b} \qquad v = \frac{a\beta - \alpha + \gamma}{a - b} \qquad w = \alpha$$

Problème (15 points)

1.a) Il est évident que $P(z_i) = 0$ (pour tout $i = 1, \dots, k$, $X - z_i$ est diviseur de P). Les nombres z_i étant tous distincts, la factorisation de P prouve que ce sont des racines simples du polynôme. On a donc $P'(z_i) \neq 0$ (sinon z_i serait au moins racine double de P).

1.b) Puisque $P'(z_i) \neq 0$, $R(z_i) = z_i - \dfrac{P(z_i)}{P'(z_i)}$ est défini pour tout $i = 1, \dots, k$. Or $P(z_i) = 0$ donc $R(z_i) = z_i$ pour tout i.
Montrons que pour tout i, $R'(z_i) = 0$. On a

$$R'(X) = 1 - \frac{P'(X)^2 - P(X)P''(X)}{P'(X)^2}$$

d'où, puisque $P(z_i)=0$, $R'(z_i)=1-\dfrac{P'(z_i)^2}{P'(z_i)^2}=0$.

1.c) On a

$$R(X)=X-\frac{P(X)}{P'(X)}=\frac{XP'(X)-P(X)}{P'(X)}=\frac{A(X)}{B(X)}$$

avec $A(X)=XP'(X)-P(X)$ et $B(X)=P'(X)$. On a $\deg P'=\deg P-1$, d'où $\deg(XP')=\deg P=k$. Donc $\deg A=k=\deg B+1$ si et seulement si les coefficients des termes de degré k de XP' et P ne sont pas égaux. Mais le terme de plus haut degré de P est X^k, celui de P' est donc kX^{k-1} et celui de XP' est kX^k. Le résultat découle alors de l'hypothèse $k>1$.

2.a) Puisque $P(X)=(X-z_1)(X-z_2)\cdots(X-z_k)=\prod\limits_{j=1}^{k}(X-z_j)$ on a

$$P'(X)=\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j\neq i}(X-z_j)\right)$$

On a donc

$$\frac{P'(X)}{P(X)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\prod\limits_{j\neq i}(X-z_j)}{\prod\limits_{j=1}^{k}(X-z_j)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{X-z_i}$$

2.b) Par hypothèse $R(z_i)=z_i$ pour tout i, donc si z_i est un pôle de $R(X)$, $(X-z_i)$ est un facteur de $S(X)$ et $R(z_i)$ ne peut être défini que si z_i est aussi racine de $Q(X)$ donc si $Q(X)$ est divisible par $(X-z_i)$ ce qui contredit l'irréductibilité de la fraction. Ceci étant on a

$$R(X)-X=\frac{Q(X)}{S(X)}-X=\frac{Q(X)-XS(X)}{S(X)}$$

et $R(z_i)-z_i=0$, donc le numérateur de la fraction, $Q-XS$ s'annule pour $X=z_i$ ($S(z_i)\neq 0$), ce qui signifie que z_i est pôle de la fraction $F(X)=\dfrac{S(X)}{Q(X)-XS(X)}$ pour tout $i=1,\cdots,k$. Le polynôme $Q(X)-XS(X)$ a donc au moins k racines distinctes et il est de degré au plus k (car $k=\deg Q>\deg S$) donc ce sont les seules racines de ce polynôme et elles sont simples (il faut cependant exclure le cas $Q-XS=0$ qui ne peut se produire car sinon S, de degré $k-1>0$, divise Q, ce qui est incompatible avec $\dfrac{Q}{S}$ irréductible). Il en résulte donc que $Q(X)-XS(X)=a(X-z_1)(X-z_2)\ldots(X-z_k)$ où a est un scalaire.

2.c) La fraction F a donc k pôles simples qui sont les nombres z_i. Elle n'a pas de partie entière car $\deg S<k=\deg(Q-XS)$. Sa décomposition en éléments simples est donc de la forme

$$F(X)=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{X-z_i}$$

avec $a_i\in\mathbb{K}$.

2.d) Calculons ces nombres a_i. On peut pour cela utiliser un résultat du cours (ou TD) – ou le redémontrer – : si $F(X) = \dfrac{A(X)}{B(X)}$, $\deg A < \deg B$ et si les racines z_i de B sont simples, alors $a_i = \dfrac{A(z_i)}{B'(z_i)}$. Dans notre situation

$$a_i = \frac{S(z_i)}{(Q - XS)'(z_i)} = \frac{S(z_i)}{Q'(z_i) - z_i S'(z_i) - S(z_i)}$$

Calculons le dénominateur de cette fraction. Pour cela utilisons $R'(z_i) = 0$. On a

$$R'(z_i) = \frac{Q'(z_i)S(z_i) - Q(z_i)S'(z_i)}{S(z_i)^2} = 0$$

et donc, $Q'(z_i)S(z_i) - Q(z_i)S'(z_i) = 0$. Il en résulte, puisque $S(z_i) \neq 0$

$$\begin{aligned} Q'(z_i) - z_i S'(z_i) - S(z_i) &= \frac{Q(z_i)S'(z_i)}{S(z_i)} - z_i S'(z_i) - S(z_i) \\ &= R(z_i)S'(z_i) - z_i S'(z_i) - S(z_i) \\ &= -S(z_i) \qquad\qquad (\text{car } R(z_i) = z_i) \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$a_i = \frac{S(z_i)}{-S(z_i)} = -1$$

2.e) Des questions **2.c)**, **2.a)** et de l'unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle il résulte

$$F(X) = \frac{1}{R(X) - X} = -\frac{P'(X)}{P(X)}$$

donc

$$R(X) - X = -\frac{P(X)}{P'(X)}$$

et finalement $R(X) = X - \dfrac{P(X)}{P'(X)}$.

3) Application. Si $R(X) = \dfrac{2X^3}{3X^2 - 1}$, on vérifie immédiatement que $R(0) = 0$, $R(1) = 1$, et $R(-1) = -1$. De plus

$$R'(X) = \frac{6X^2(X^2 - 1)}{(3X^2 - 1)^2}$$

d'où $R'(0) = R'(1) = R'(-1) = 0$ et on constate que toutes les conditions de **2)** sont vérifiées (avec $k = 3$). On a alors $P(X) = X(X-1)(X+1) = (X^3 - X)$ et

$$R(X) - X = -\frac{(X^3 - X)}{3X^2 - 1} = -\frac{P(X)}{P(X)}$$

(relation que l'on peut aussi vérifier directement et appliquer **1.b)**).
La décomposition en éléments simples demandée est donc donnée par les questions **2.c)** et **2.d)** ou **2.a)**

$$\frac{3X^2 - 1}{(X^3 - X)} = \frac{1}{X} + \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X + 1}$$