Corrigé de l'examen du 25 mai 2004

Question de cours. (3 points) (voir le cours pour les preuves)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

Application. (2 points)

Calculons la limite de $\dfrac{x\ln(1-x^2)}{x-\sin x}$ en 0 en utilisant les développements ci-dessus. Si $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{x\ln(1-x^2)}{x-\sin x} &= \frac{x(-x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5))}{x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\ &= \frac{x^3(-1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + o(x^2)\right)} \\ &= \frac{-1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + o(x^2)}\end{aligned}$$

d'où la limite quand $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1-x^2)}{x-\sin x} = -6$$

Problème (15 points)

Partie I

1/ Le carré de la matrice de g donne $M(g).M(g) = \left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) = -I$ ce qui correspond à $g\circ g = -Id_E$.

2/ Pour que B soit une base de l'espace vectoriel E de dimension 2, il suffit que les 2 vecteurs e_1 et $g(e_1)$ soient linéairement indépendants ce qui est le cas puisque $g(e_1)$ n'est pas multiple de e_1. [On peut aussi utiliser les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\{e_1, e_2\}$ et la définition de l'indépendance linéaire.]

3/ On doit calculer les composantes de $g(e_1)$ et $g(g(e_1))$ dans la base $B = \{e_1, g(e_1)\}$ (les colonnes de la matrice). Dans la base B on a $g(e_1) = (0,1)$; $g(g(e_1)) = -e_1 = (-1,0)$ d'où la matrice

$$M_B(g) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Partie II

1/ Soient λ et μ deux scalaires (réels) tels que $\lambda f(a) + \mu a = 0$. La linéarité de f et la relation $f\circ f - -Id_E$ entraînent $0 = f(\lambda f(a) + \mu a) = \lambda f\circ f(a) + \mu f(a) = -\lambda a + \mu f(a)$, d'où le système

$$\begin{cases}\lambda f(a) + \mu a &= 0\\ \mu f(a) - \lambda a &= 0\end{cases}$$

En multipliant la première équation par μ, la seconde par λ et soustraction des résultats on obtient $(\lambda^2+\mu^2)a = 0$ donc, $\lambda = \mu = 0$ puisque $a \neq 0$ et que les scalaires sont réels. La famille $\{a, f(a)\}$ est bien libre.

2/ Puisque la famille $\{a, f(a)\}$ est libre, elle est génératrice d'un sous-espace vectoriel F_a de dimension 2. L'image $f(F_a)$ est engendrée par les 2 vecteurs $f(a)$ et $f(f(a)) = -a$, tous les 2 appartenant à F_a, donc $f(F_a) \subset F_a$.

3/ Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f contenant a, il contient aussi $f(a)$ donc F_a sous-espace engendré par a et $f(a)$. Ainsi F_a est bien le plus petit sous-espace vectoriel de E, stable par f, contenant a. (On remarquera pour la suite que si b est un autre vecteur de E, F_b est le plus petit sous-espace stable par f contenant b.)

4/ a- Il est évident que l'intersection de 2 (ou plus !) sous-espaces vectoriels F et G stables par f est aussi stable par f car $f(F \cap G) \subset f(F) \cap f(G) \subset F \cap G$. Considérons un vecteur $b \in F_a \cap G = H$, $b \neq 0$. Comme H est stable par f, on a, d'après **3/**, $F_b \subset H = F_a \cap G$, donc $F_b \subset F_a$. Ces deux sous-espaces vectoriels étant de dimension 2, ils sont identiques. Il en résulte donc que $F_a = F_b \subset G$.
(On peut aussi dire que $b = \alpha a + \beta f(a) \in F_b$ donc $f(b) = \alpha f(a) - a \in F_b$ et par suite $(\alpha^2 + \beta^2)a \in F_b$ donc $a \in F_b$ et $F_a \subset F_b$.)

4/ b- Si $G \cap F_a = \{0\}$, il est clair que $a \notin G$. Réciproquement, si $a \notin G$, alors d'après **4/ a-**, si $G \cap F_a \neq 0$ alors $F_a \subset G \cap F_a$ donc $G \cap F_a = \{0\}$

5/ Si $a \notin G$ et G stable par f, on a $F_a \cap G = \{0\}$ (d'après **4/ b-**). Donc $F_a \oplus G$ est une somme directe. Si $x \in F_a \oplus G$ on a $x = u + v$ avec $u \in F_a$ et $v \in G$, donc $f(x) = f(u) + f(v) \in f(F_a) + f(G) \subset F_a + G$, donc $F_a \oplus G$ est stable par f. En appliquant cela à $G = F_b$ ($b \notin F_a$ on voit que la somme directe $F_a \oplus F_b$ est stable par f.

6/ Soit $a_1 \neq 0$ (on suppose $E \neq \{0\}$). Le sous-espace F_{a_1} est stable par f et $B_1 = \{a_1, f(a_1)\}$ est une base de F_{a_1} (cf. questions **1/ et 2/**). Soit p un entier et supposons qu'il existe des vecteurs $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ tels que

$$\mathcal{B}_p = \{a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_p, f(a_p)\}$$

soit une famille libre de E. Montrons que si $\mathcal{B}_p$ n'est pas une base de E, il existe a_{p+1} tel que

$$\mathcal{B}_{p+1} = \{a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_{p+1}, f(a_{p+1})\}$$

soit une famille libre de E.
Notons G_p l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{B}_p$ (de dimension $2p$ puisque $\mathcal{B}_p$ est libre). Ce sous-espace est stable par f. En effet, il suffit de montrer que les images par f des éléments de $\mathcal{B}_p$ appartiennent à G_p. Mais, pour tout $i = 1, ..., p$, $f(a_i) \in G_p$ et $f(f(a_i)) = -a_i \in G_p$. Alors, si G_p est différent de E, il existe $a_{p+1} \notin G_p$ et d'après la question **5/**, $G_p \oplus F_{a_{p+1}}$ est une somme directe, d'où il résulte que la réunion d'une base de G_p et d'une base de $F_{a_{p+1}}$ est une base de $G_{p+1} = G_p \oplus F_{a_{p+1}}$. donc

$$\mathcal{B}_{p+1} = \{a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_{p+1}, f(a_{p+1})\}$$

est libre. Comme E est de dimension finie, il existe k tel que $\mathcal{B}_k$ engendre E, c'est-à-dire que la famille libre $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}$ est une base de E constituée de $2k$ éléments, donc $\dim E = 2k$ est paire.

7/ Pour écrire la matrice $M(f)$ de f dans cette base il ne reste qu'à calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ par f et calculer les composantes trouvées dans cette même base. Or pour tout $i = 1, ..., 3$ (si $\dim E = 6$)

$$f(a_i) \in \mathcal{B} \quad ; \quad f(f(a_i)) = -a_i$$

d'où la matrice

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8/-a Si $\dim E = 2k$ est paire, il existe une base

$$\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k-1}, a_{2k}\}$$

Pour $0 < i = 2p+1 < 2k$ impair, posons $f(a_{2p+1}) = a_{2p+2}$ et pour $1 < i = 2p \leqslant 2k$ pair, $f(a_{2p}) = -a_{2p-1}$. Ceci définit un endomorphisme de E et il est immédiat de vérifier que $f(f(a_i)) = -a_i$ pour tout $i = 1, \dots, 2k$.

8/-b La relation $h \circ h^{-1} = Id_E$ et la linéarité de h permettent d'écrire

$$\begin{aligned} g \circ g &= (h^{-1} \circ f \circ h) \circ (h^{-1} \circ f \circ h) \\ &= h^{-1} \circ f \circ (h \circ h^{-1}) \circ f \circ h = h^{-1} \circ f \circ Id_E \circ f \circ h \\ &= h^{-1} \circ f \circ f \circ h = h^{-1} \circ (-Id_E) \circ h \\ &= -h^{-1} \circ h = -Id_E \end{aligned}$$

d'où le résultat.

8/-c Réciproquement, soient f, g avec $f \circ f = -Id_E$ et $g \circ g = -Id_E$. Il existe des bases

$$\mathcal{B}_f = \{a_1, f(a_1), a_2, f(a_2), \dots, a_p, f(a_p)\}$$

et

$$\mathcal{B}_g = \{b_1, g(b_1), b_2, g(b_2), \dots, b_p, g(b_p)\}$$

trouvées en **6/** et relatives à f et g respectivement. Définissons alors une application linéaire h de E dans lui-même par $h(b_i) = a_i$ et $h(g(b_i)) = f(a_i)$ pour tout $i = 1, \dots, p$. Alors h est un isomorphisme de E (car transforme une base de E en une base de E) et il est immédiat que $h^{-1}(a_i) = b_i$ et $h^{-1}(f(a_i)) = g(b_i)$. Avec cette définition on obtient :

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ f \circ h(b_i) &= h^{-1} \circ f(a_i) \\ &= g(b_i) \\ h^{-1} \circ f \circ h(g(b_i)) &= h^{-1} \circ f \circ f(a_i) \\ &= h^{-1}(-a_i) = -h^{-1}(a_i) \\ &= -b_i \\ &= g(g(b_i)) \end{aligned}$$

Donc, $h^{-1} \circ f \circ h = g$.

9/ On peut appliquer la construction de **8/c**. On note $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose pour f : $a = e_1$ donc $f(a) = e_2$, pour g $b = e_1$, $g(b) = -e_2$. D'où $h(e_1) = e_1$ et $h(e_2) = -e_2$ et la matrice de h

$$M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On constate alors que $h^{-1} = h$ et $h \circ f \circ h = g$.