Corrigé de l'examen du 4 juin 2003

Question de cours (4 points) **a)** La fonction $a : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue. Il existe donc des solutions de cette équation définies sur $\mathbb{R}$. Soit

$$A(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = \ln\sqrt{x^2+1}$$

une primitive de a. Les solutions y sont donc définies par

$$y(x) = ke^{-\ln\sqrt{x^2+1}} = \frac{k}{\sqrt{x^2+1}} \qquad k \in \mathbb{R}$$

b) On cherche une solution particulière de l'équation de la forme

$$y(x) = \frac{k(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

où k est la fonction à déterminer (méthode de variation de la constante). On obtient alors

$$y'(x) + \frac{x}{x^2+1}y(x) = \frac{k'(x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

d'où $k'(x) = 1$ dont une primitive sur $\mathbb{R}$ est x. On obtient alors une solution particulière

$$y_0(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

et la solution générale de l'équation

$$y(x) = \frac{x+k}{\sqrt{x^2+1}} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Si on impose $y(1) = \sqrt{2}$ on obtient aussitôt $k = 1$ et la solution unique

$$y_0(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice. Au voisinage de 0 on a $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$. Donc $\ln\left(1+\cos x\right) = \ln(2 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$ puis

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\cos x\right) &= \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} + o(x^4)\right) \\
&= \ln 2 + \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48}\right)^2 + o(x^4) \\
&= \ln 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{32} + o(x^4) \\
&= \ln 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Problème A.1 – Soit A et B deux matrices 2×2 et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Alors
$$A+\lambda B=\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix}$$
d'où $\varphi(A+\lambda B)=(a+\lambda a')+(d+\lambda d')=(a+d)+\lambda(a'+d')=\varphi(A)+\lambda\varphi(B)$ et φ est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_2$ dans $\mathbb{R}$. La matrice de cette application (relativement aux bases du texte), a pour colonnes les images des matrices $E_{i,j}$.
$$\varphi(E_{1,1})=\varphi(E_{2,2})=1 \qquad \varphi(E_{1,2})=\varphi(E_{2,1})=0$$
d'où la matrice $M(\varphi)=(1,0,0,1)$.

A.2 – La dimension de $\mathbb{R}$ étant 1 et $\varphi(E_{1,1})\neq 0$, on en conclut que $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}$ et que φ est surjective. La théorème du rang prouve donc que $\dim\ker\varphi=3$ (car $\dim\mathcal{M}_2=4$). On trouve aussitôt 3 vecteurs (matrices) linéairement indépendants de ce noyau : $E_{1,2}, E_{2,1}, E_{1,1}-E_{2,2}$ qui constituent une base. Pour compléter cette base en une base de $\mathcal{M}_2$ il suffit de choisir une matrice M tel que $\varphi(M)\neq 0$ par exemple $E_{1,1}$.

A.3 – Soit $N=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. On a
$$MN=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$$
et
$$NM=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix}$$
D'où $\varphi(MN)=aa'+bc'+cb'+dd'=\varphi(NM)$. Puisque φ est linéaire, on a $\varphi(MN-NM)=\varphi(MN)-\varphi(NM)=0$. Or $\varphi(I)=2$, donc il n'existe pas de couple de matrices M et N telle que $MN-NM=I$.

A.4 –
$$ME_{11}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{11}M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$ME_{12}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad E_{12}M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Si $MN=NM$ pour toute matrice $N\in\mathcal{M}_2$ c'est en particulier vrai pour les matrices $E_{i,j}$. Du calcul ci-dessus on déduit que la matrice M doit vérifier $b=c=0$ (première ligne ci-dessus) et $a=d$ (deuxième ligne), d'où $M=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=aI$. Réciproquement, on a $NI=IN$ pour toute matrice N donc, si $M=\lambda I$ on a aussi $MN=NM$.

B.1 – Comme en **A.1** on a pour $M=(a_{ij}),\ N=(b_{ij})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$
$$\varphi(M+\lambda N)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}+\lambda b_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}+\lambda\sum_{i=1}^{n}b_{ij}=\varphi(M)+\lambda\varphi(M)$$
ce qui prouve la linéairité de φ. De même $\varphi(E_{1,1})=1$ donc $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}$. Comme $\dim\mathcal{M}_n=n^2$, le théorème du rang montre que $\dim(\ker\varphi)=n^2-1$.

B.2 – Il est clair que les matrices $E_{i,j},\ i\neq j$ sont indépendantes et appartiennent au noyau de φ. Ce qui fait n^2-n éléments d'une base cherchée. On constate ensuite que $\varphi(E_{1,1}-E_{i,i})=0$ si $i\neq 1$. Ces vecteurs sont indépendants : en effet si $0=\sum_{i=2}^{n}a_i(E_{1,1}-E_{i,i})=\Big(\sum_{i=2}^{n}a_i\Big)E_{1,1}-\sum_{i=2}^{n}a_{i,i}E_{i,i}$, alors $a_{i,i}=0$ pour tout $i=2,\dots,n$ (indépendances des matrices $E_{i,i}$. De plus ces

$n-1$ matrices sont diagonales et donc n'appartiennent pas au sous-espace engendré par les $E_{i,j},\ i \neq j$. La famille des n^2-1 matrices

$$K = \{E_{i,j},\ i \neq j,\ (E_{1,1} - E_{l,l}),\ l \neq 1\}$$

est une base de $\ker\varphi$.

B.3 – On a $MN = (c_{i,j})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ où

$$c_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p} b_{p,j}$$

ce qui donne

$$\varphi(MN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} a_{i,p} b_{p,i}$$

et en échangeant a et b

$$\varphi(NM) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} b_{i,p} a_{p,i} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{p,i} b_{i,p} = \varphi(MN)$$

B.4 – Ecrivons la matrice M dans la base B_n :

$$M = \sum_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}} a_{i,j} E_{i,j}$$

donc, puisque f est linéaire

$$f(M) = \sum_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}} a_{i,j} f\big(E_{i,j}\big) \tag{1}$$

Définissons alors une matrice $A_f = (\alpha_{i,j})_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ en posant $\alpha_{i,j} = f(E_{j,i})$ pour tous i, j. On constate aussitôt que

$$\varphi(A_f M) = \varphi(M A_f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\alpha_{j,i} = f(M)$$

Montrons l'unicité d'une telle matrice A_f. Soit $B_f = (\beta_{i,j})$ une matrice telle que $f(M) = \varphi(B_f M)$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n$ et considérons $M = E_{k,l} = (m_{i,j})$. On a d'après (1)

$$f(E_{k,l}) = \varphi(B_f E_{k,l}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} m_{j,i}$$

or seul $m_{k,l}$ est un coefficient non nul de $E_{k,l}$ et égal à 1 donc

$$f(E_{k,l}) = \beta_{l,k} m_{k,l} = \beta_{l,k}$$

C'est-à-dire que le coefficient $\beta_{l,k}$ est égal nécessairement à $f(E_{k,l}) = a_{l,k}$, ce qui assure l'unicité de A_f.

B.5 – Montrons que Ψ est

– linéaire : en effet, $A_f = \big(f(E_{j,i})\big)_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$, donc si $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
A_{f+\lambda g} &= \Big((f+\lambda g)(E_{j,i})\Big)_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}} = \Big(f(E_{j,i}) + \lambda g(E_{j,i})\Big)_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\\
&= \Big(f(E_{j,i})\Big)_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}} + \lambda\Big(g(E_{j,i})\Big)_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}\\
&= A_f + \lambda A_g
\end{aligned}$$

– injective : si $A_f = (\alpha_{i,j}) = 0$, comme on a vu que $\alpha_{i,j} = f(E_{j,i})$, cela entraîne que $f(E_{j,i}) = 0$ pour tous les éléments de la base B_n donc f est nulle, et Ψ est bien injective.
– surjective : on peut utiliser le théorème du rang en remarquant que $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n$ ont même dimension n^2 et que Ψ est injective. On peut aussi constater que si $A = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$, on définit une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R})$ en posant pour tous i, j, $f(E_{i,j}) = \alpha_{j,i}$. D'après les calculs de $B.4$, on a clairement $A_f = A$.

B.6 – Soit $M = (a_{i,j})$ et soit $E_{k,l} = (m_{i,j})$ une matrice de la base B_n (les $m_{i,j}$ dépendent de k et l). On note $c_{i,j}$ et $d_{i,j}$ les éléments des matrices $ME_{k,l}$ et $E_{k,l}M$. On a

$$c_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p} m_{p,j} \qquad d_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} m_{i,p} a_{p,j}$$

mais seul $m_{k,l} \neq 0$ et vaut 1. On a donc $c_{i,j} = 0$ si $i \neq l$ et $c_{i,l} = a_{i,k} m_{k,l} = a_{i,k}$. De même, $d_{i,j} = 0$ si $i \neq k$ et $d_{k,j} = m_{k,l} a_{l,j} = a_{l,j}$. Autrement dit, $ME_{k,l}$ a toutes ses colonnes nulles sauf la colonne l qui est la colonne k de M. De même, $E_{k,l}M$ a toutes ses lignes nulles sauf la ligne k qui est la ligne l de M.
Supposons que M commute avec toute matrice $N \in \mathcal{M}_n$, en particulier avec les $E_{k,l}$. On a donc $d_{i,j} = c_{i,j}$ pour tous $i, j = 1, \dots, n$.
Soit d'abord $i \neq j$. Si $l \neq j$ on a $c_{i,j} = 0$, mais pour $k = i$ on a $d_{i,j} = d_{k,j} = a_{l,j}$. Donc, $a_{l,j} = 0$ pour $l \neq j$. La matrice M est donc diagonale.
Choisissons maintenant $l = j$. On a vu que $c_{i,j} = a_{i,k}$ donc $c_{k,j} = a_{k,k}$. De même, $d_{k,j} = a_{l,j} = a_{l,l}$ (car $l = j$). Comme k et l sont quelconques, on a montré que tous les éléments de la diagonale de M sont égaux. La matrice M qui commute à toute matrice est donc multiple de I.