Examen du 3 juin 2002
(8 heures 30 – 11 heures 30)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Questions de cours (4 points)

1 – Calculer le développement limité à l'ordre n au voisinage de $x = 0$ de $\ln(1 + x)$.

2 – Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F. Prouver que tout sous-espace vectoriel de E supplémentaire du noyau de f est isomorphe à l'image de f.

Exercice (3 points)

On considère les 3 vecteurs suivants de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que ces trois vecteurs constituent une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les composantes dans cette base du vecteur $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Réponse :$w = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Problème (13 points)

On note : E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$, $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_3$ l'espace vectoriel des matrices 3×3 à coefficients complexes et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3$
Dans tout le problème, J désigne la matrice suivante de $\mathcal{M}_3$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 – Soit f est l'application linéaire de E dans E dont la matrice dans la base B est J. Exprimer $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base B, puis déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire f.

Réponse : Les composantes des vecteurs $f(e_i)$, $i = 1, 2, 3$, sont les coefficients des colonnes respectives de la matrice. f est un isomorphisme : permutation des vecteurs de la base, à un scalaire multiplicatif près.

2 – Calculer les matrices J^2 et J^3 et prouver qu'il existe un plus petit entier $k > 0$ tel que $J^k = I$.
Calculer J^n pour tout entier $n > 0$ en distinguant suivant les valeurs de n modulo 6 (ou modulo 3).
Réponse :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J^3 = -I \qquad J^6 = I$$

$$J^{3k} = (-1)^k I \qquad J^{3k+1} = (-1)^k J \qquad J^{3k+2} = (-1)^k J^2$$

3 – Démontrer que $\{I, J, J^2\}$ est une partie libre de $\mathcal{M}_3$.

[Réponse :

$$xI + yJ + zJ^2 = \begin{pmatrix} x & iz & iy \\ iy & x & -z \\ iz & y & x \end{pmatrix}$$

d'où $x = y = z = 0$]

4 – **a**/ On note V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$ engendré par l'ensemble des matrices J^n avec $n \geqslant 1$.
Démontrer que $V = \mathrm{Vect}(I, J, J^2)$.
[Réponse : $I = -J^3 \in V$ et J^n, $n > 0$ est au signe près égale à une de ces 3 matrices]

b/ Quelle est la dimension de V ?
[Réponse : (I, J, J^2) est une famille libre (**3**) et génératrice (**4** – **a**/) donc une base de V et $\dim V = 3$]

5 – **a**/ Soit $N \in \mathcal{M}_3$. Démontrer que $MN = NM$ pour toute $M \in V$ si et seulement si $NJ = JN$. On dira dans ce cas que N commute à toute matrice de V.
[Réponse : Si $M \in V$, il existe d'après **4** – **b**/ trois complexes a, b, c tels que $M = aI + bJ + cJ^2$. Si$NJ = JN$ on a aussi $NJ^2 = J^2N$, $NI = IN$ et

$$NM = N(aI+bJ+cJ^2) = aNI+bNJ+cNJ^2 = aIN+bJN+cJ^2N = (aI+bJ+cJ^2)N = MN$$

Réciproquement, il suffit de prendre $M = J$]
b/ On note

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3$. Calculer NJ et JN.
[Réponse :

$$NJ = \begin{pmatrix} ia_2 & a_3 & ia_1 \\ ib_2 & b_3 & ib_1 \\ ic_2 & c_3 & ic_1 \end{pmatrix} \qquad JN = \begin{pmatrix} ic_1 & ic_2 & ic_3 \\ ia_1 & ia_2 & ia_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

]
c/ Démontrer que si $NJ = JN$ alors $N = a_1 I - ia_3 J - ia_2 J^2$ et en déduire que N commute à toute matrice de V si et seulement si N appartient à V.
[Réponse : Si $NJ = JN$ on a nécessairement $c_1 = a_2$, $c_2 = -ia_3$, $c_3 = a_1$, $b_2 = a_1$, $b_3 = ia_2$, $b_1 = a_3$. Ceci entraîne alors $b_1 = ic_2$, $b_3 = ia_2 = ic_1$ et l'égalité des 2 produits. N et J commutent donc si et seulement si

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & ia_2 \\ a_2 & -ia_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $N = a_1 I - ia_3 J - ia_2 J^2$ ce qui caractérise une matrice quelconque de V.]

6 – On pose $E = \dfrac{1}{3}(I - J + J^2)$ et

$$W = \{X;\ X \in V,\ XE = EX = X\}$$

a/ Vérifier que W est un sous-espace vectoriel de V.
[Réponse : W contient 0, et est stable par addition et multiplication par un scalaire complexe (évident).]
b/ Déterminer l'expression d'une matrice $X \in W$ à l'aide de la partie génératrice de V trouvée en **4** – **a**/.
[Réponse : Soit $X = aI + bJ + cJ^2$ une matrice de V écrite dans la base (I, J, J^2). Comme E et X sont dans V on a $XE = EX$. Il suffit donc de chercher X telle que $XE = X$. Or en tenant compte de $J^3 = -I$ et $J^4 = -J$ on a : $XE = \dfrac{1}{3}(aI + bJ + cJ^2)(I - J + J^2) =$

$\frac{1}{3}\big((a-b+c)I+(b-a-c)J+(c+a-b)J^2\big) = aI+bJ+cJ^2$. En identifiant les composantes dans la base (I,J,J^2), on obtient le système :

$$\begin{cases} a-b+c &= 3a \\ -a+b-c &= 3b \\ a-b+c &= 3c \end{cases} \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{cases} -2a-b+c &= 0 \\ a+2b+c &= 0 \\ a-b-2c &= 0 \end{cases}$$

La somme des 2 dernières équations redonne la première, le système est donc équivalent aux système des 2 dernières équations. Par soustraction on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} a+2b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \end{cases}$$

d'où $b=-c$, $a=c$ avec c arbitraire. Les matrices $X \in W$ sont donc de la forme $X = c(I-J+J^2)$ c'est-à-dire les multiples de E.]
c/ Quelle est la dimension de W ?
[Réponse : W est dimension 1 d'après **6 – b**/]

7 – a/ Soit M une matrice inversible de V. Prouver que son inverse M^{-1} commute à toute matrice de V puis que $M^{-1} \in V$.
[Réponse : Si $MN=NM$, en multipliant à gauche et à droite par M^{-1} on obtient $NM^{-1} = M^{-1}N$ donc $M^{-1} \in V$ d'après **5 – c**/.]
b/On suppose que $M = aI+bJ+cJ^2$ est une matrice inversible de V fixée. On note $M^{-1} = xI+yJ+zJ^2$ son inverse. Déterminer un système de 3 équations linéaires vérifié (x,y,z).
[Réponse : On doit avoir : $(aI+bJ+cJ^2)(xI+yJ+zJ^2) = I$ (produit commutatif...), d'où

$$(ax-cy-bz)I-(bx+ay-cz)J+(cx+by+az)J^2 = I$$

et aussitôt le système vérifié par (x,y,z) en identifiant les composantes des 2 membres dans la base $(I,J,J^2$

$$\begin{cases} ax-cy-bz &= 1 \\ bx+ay-cz &= 0 \\ cx+by+az &= 0 \end{cases}$$

]
c/ En déduire une relation nécessaire et suffisante portant sur (a,b,c) pour que M soit inversible.
[Réponse : M est inversible si et seulement si le système ci-dessus a une solution (alors unique...) Notons L_1, L_2, L_3 les 3 lignes du système.
Supposons $c \neq 0$. Alors $L_1 - \frac{a}{c}L_3$ et $L_2 - \frac{b}{c}L_3$ donnent en multipliant par $c \neq 0$

$$\begin{cases} (c^2+ab)y+(bc+a^2)z &= -c \\ (ac-b^2)y-(c^2+ab)z &= 0 \\ cx+by+az &= 0 \end{cases}$$

Les 2 premières équations sont compatibles (avec solution unique) si et seulement si les premiers membres ne sont pas proportionnels, c'est-à-dire :

$$(c^2+ab)(c^2+ab)+(ac-b^2)(bc+a^2) \neq 0$$

ce qui se simplifie en tenant compte de $c \neq 0$ en

$$a^3-b^3+c^3+3abc \neq 0$$

Si $c=0$, le système devient

$$\begin{cases} ax-bz &= 1 \\ bx+ay &= 0 \\ by+az &= 0 \end{cases}$$

Si $a=0$ alors b ne peut pas être nul à cause de la première équation. et la relation $a^3-b^3+c^3+3abc\neq 0$ trouvée est dans ce cas identique à $b\neq 0,\ a=0,\ c=0$. Si $a\neq 0$, le système devient :

$$\begin{cases} a^2y+b^2z & =-1 \\ bx+ay & =0 \\ by+az & =0 \end{cases}$$

la première et la dernière équation sont compatibles si et seulement si $a^3-b^3\neq 0$, ce qui correspond à la relation générale avec $c=0$. En définitive la condition pour que la matrice soit inversible est

$$a^3-b^3+c^3+3abc\neq 0$$

]