Corrigé de l'examen du 9 mai 2006

Exercices (Voir les TD...)

Problème

1) La fonction $t \rightarrow e^{-t^2}$ est continue sur $[0; \infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle. De plus lorsque $t \geq 1$, $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$, donc pour tout $X > 1$

$$\int_1^X e^{-t^2} dt \leq \int_1^X e^{-t} dt = e^{-1} - e^{-X} \leq e^{-1}$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale à l'infini.

2-a) Pour tout $x \geq 0$ et tout $t > 0$ on a $0 < \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Or l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente. l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ est donc aussi convergente pour $x \geq 0$ et même normalement convergente car la majoration ci-dessus est indépendante de x .

La fonction $(t, x) \rightarrow \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue par rapport à x pour $x \in D$ et l'intégrale $f(x)$ est normalement convergente sur $[0, +\infty[$: f est donc une fonction continue sur $[0, +\infty[$.

2-b) Remarquons que $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} < 1$ si $x \in [0, +\infty[$ et $t > 0$, d'où, pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_0^\varepsilon \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \leq \varepsilon$. De plus, pour tout $t > \varepsilon$, $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-x\varepsilon^2}}{1+t^2}$ donc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^\varepsilon \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt + e^{-x\varepsilon^2} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{1+t^2} \leq \varepsilon + \frac{\pi}{2} e^{-\varepsilon^2 x}$$

d'où $0 \leq f(x) \leq \varepsilon + \frac{\pi}{2} e^{-\varepsilon^2 x}$. Quand x tend vers l'infini, on voit donc que le membre de droite de la dernière inégalité tend vers ε et compte tenu de l'arbitraire de ε , on a bien $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

3-a) Soit $x_0 \in]0; \infty[$. La fonction $\varphi : (x, t) \rightarrow \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est, pour tout t fixé, dérivable rapport à x sur l'intervalle $] \frac{x_0}{2}; 2x_0[$, par exemple, et on a pour $x \in] \frac{x_0}{2}; 2x_0[$ et $t \in]0; \infty[$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-x_0 t^2}$$

Il en résulte, puisque l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x_0 t^2} dt$ est convergente, que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt$ est normalement convergente sur $] \frac{x_0}{2}; 2x_0[$. Le théorème de dérivation des intégrales convergentes paramétrées prouve alors que f est dérivable en $x_0 \in]0; \infty[$ et que

$$f'(x_0) = \int_0^\infty \frac{-t^2 e^{-x_0 t^2}}{1+t^2} dt$$

4)

$$f'(x) - f(x) = \int_0^\infty -e^{-xt^2} dt = \int_0^\infty e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{-k}{\sqrt{x}}$$

en utilisant un changement de variable évident.

5) La fonction λ est définie pour tout $x > 0$ car $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est convergente et c'est une primitive de la fonction $t \rightarrow -\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$. On calcule alors la dérivée de λ

$$\lambda'(x) = ke^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt - ke^x \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = \lambda - \frac{k}{\sqrt{x}}$$

ce qui prouve que λ est solution de (E).

6) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x; \infty[$, on a $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{x}}$ d'où

$$0 < \lambda(x) \leq k \frac{e^x}{\sqrt{x}} \int_x^\infty e^{-t} dt = \frac{k}{\sqrt{x}}$$

donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x) = 0$.

7) Puisque λ est solution particulière de (E) et que f est aussi solution de (E), on a $f(x) = Ae^x + \lambda(x)$ où A est une certaine constante. De plus, f et λ ont une limite nulle à l'infini, donc $f = \lambda$. D'autre part,

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_{\sqrt{x}}^\infty e^{-u^2} du$$

donc la limite de λ en 0 est égale à $2k \int_0^\infty e^{-u^2} du = 2k^2$ et aussi à $f(0)$ car f est continue en 0. Mais $f(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, donc $2k^2 = \frac{\pi}{2}$ et

$$k = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$