UNIVERSITÉ DE POITIERS — Licence de Mathématiques L3

Année 2005-2006 — Module MATH5L12

Corrigé de l'examen du 14 décembre 2005

Exercice (6 points) (Voir aussi les TD...)

1) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de Y. Puisque f est bijective, il existe, pour tout n, un unique $x_n \in X$ tel que $f(x_n) = y_n$. D'après l'hypothèse sur f on a, pour des entiers p, q

$$d(x_p, x_q) \leqslant a.d(y_p, y_q)$$

ce qui montre que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy. Comme X est complet, elle admet une limite x. Ensuite la continuité de f montre que $y_n = f(x_n)$ converge vers $f(x)$, ce qui prouve que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, donc que Y est complet.

2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X. Comme f est uniformément continue, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Y (cours, Chap. 3, prop. 3-2), donc elle converge vers un point y puisque Y est complet. Comme f est bijective, $y = f(x)$ pour un unique $x \in X$. Il reste à vérifier que x est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais f^{-1} est continue, donc $x_n = f^{-1}(y_n)$ converge vers $f^{-1}(y) = x$ et X est bien complet.

Problème (14 points)

I-1. Soit $a \in A$ On a

$$d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$$

donc, $d(x, A) \leqslant d(x, y) + \inf\{d(y, a)\ ;\ a \in A\} = d(x, y) + d(y, A)$. Ensuite, pour tout $a \in A$,

$$d(A, B) \leqslant d(a, B) \leqslant d(a, x) + d(x, B) \leqslant d(a, x) + d(x, y) + d(y, B)$$

d'où

$$d(A, B) \leqslant d(A, x) + d(x, y) + d(y, B)$$

I-2. Soit $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un point x. Comme $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers, donc non bornée, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier P tel que $n_p > n$ pour tout $p > P$. Donc x est aussi la limite de la sous-suite $(x_{n_p})_{p>P}$ dont les termes sont dans A_n, ce qui signifie bien que $x \in \overline{A_n}$.

I-3. Soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$. En particulier, $x \in \overline{A_0}$ donc, il existe $x_{n_0} \in A_0$ tel que $d(x, x_{n_0}) < 1$. Supposons trouvé un n_p tel que $x_{n_p} \in A_{n_p}$ et $d(x_{n_p}, x) < \dfrac{1}{p+1}$. Comme $x \in \overline{A_{n_p+1}}$, il existe $n_{p+1} \geqslant n_p + 1$ avec $d(x, x_{n_{p+1}}) < \dfrac{1}{p+2}$. La sous-suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge bien vers $x \in F$. Ce résultat, joint à **I-2** prouve que $F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

I-3. Si, par exemple, $x_n = n$, alors $A_n = \{p\ ;\ p \geqslant n\} = \overline{A_n}$. Donc $F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \emptyset$. Il est évident que cette suite n'a pas de suite extraite convergente.

II-1. Si X est compact, F n'est pas vide, car de toute suite infinie on peut extraire une sous-suite convergente.

Pour prouver l'existence de k, il suffit de montrer que la distance de F_1 et F_2 est non nulle. Mais si cette distance était nulle, il existerait pour tout n un couple $(y_n, y'_n) \in F_1 \times F_2$ tel que $d(y_n, y'_n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Comme $F_1 \times F_2$ est un fermé du compact $X \times X$, c'est une partie compacte également. Il existerait donc une sous-suite convergente de (y_n, y'_n) de limite $(y, y') \in F_1 \times F_2$ et comme $y = y' \in F_1 \cap F_2$, cela contredirait la condition $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ et par suite montre l'existence de k.

II-2. Pour prouver que K est compact, le plus simple est de dire que l'application $f : y \mapsto d(y, F_1 \cup F_2)$ est continue (c'est immédiat en appliquant la première inégalité de **I-1** qui prouve que $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)$). En effet, on a alors $K = f^{-1}([\frac{k}{3}, +\infty[)$ qui est fermé dans X compact, donc K est aussi compact.

II-3. Soit $m \geqslant 0$ et soit $x \in F_1$. Par définition de F il existe x_{n_1} terme d'une sous-suite convergente vers x, tel que $d(x, x_{n_1}) < \dfrac{k}{3}$. Mais si $y \in F_2$, alors $y \in \overline{A_n}$ pour tout $n > n_1$ donc il existe $n_2 > n_1$ tel que $d(x, x_{n_2}) < \dfrac{k}{3}$. Donc

$$d(x_{n_1}, F_1) < \frac{k}{3} \quad \text{et} \quad d(x_{n_2}, F_2) < \frac{k}{3} \quad m \leqslant n_1 < n_2$$

III-1. Choisissons m tel que $d(x_p, x_{p+1}) < \dfrac{k}{3}$ pour tout $p > m$. Ensuite, n_1, n_2 tels que $m \leqslant n_1 < n_2$, comme trouvé en **II-3**. Posons

$$n = \max\{p \ ; \ n_1 \leqslant p \leqslant n_2 \text{ et } d(x_p, F_1) < \frac{k}{3}\}$$

Alors n est strictement inférieur à n_2 car d'une part $d(x_{n_2}, F_2) < \frac{k}{3}$ et si $d(x_{n_2-1}, F_1) < \frac{k}{3}$ alors (voir **I-1**)

$$d(F_1, F_2) \leqslant d(F_1, x_{n_2-1}) + d(x_{n_2-1}, x_{n_2}) + d(x_{n_2}, F_2) < 3.\frac{k}{3} = k$$

ce qui contredit la définition de k. Donc, pour cet entier $n < n_2$ on a

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{k}{3} \quad ; d(x_n, F_1) < \frac{k}{3} \quad \text{et} \quad d(x_{n+1}, F_1) \geqslant \frac{k}{3}$$

et d'après **I-1**

$$d(x_{n+1}, F_2) \geqslant d(F_1, F_2) - d(x_{n+1}, x_n) - d(x_n, F_1) \geqslant k - \frac{k}{3} - \frac{k}{3} = \frac{k}{3}$$

On vient donc de montrer que si m est donné, il existe $n > m$ tel que $x_{n+1} \in K$.

III-2. On construit cette suite extraite par récurrence. Si x_{n_m} est trouvé, on choisit $n_{m+1} > n_m$ comme dans la question précédente pour que $x_{n_{m+1}} \in K$.

III-3. Si F n'est pas connexe, il est réunion de deux fermés (de F et de X car F est fermé) non vides disjoints, F_1 et F_2. La question précédente montre qu'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les termes sont dans le compact K. Il y a au moins une sous-suite de cette sous-suite qui converge vers un point x qui est donc dans K mais aussi dans F par définition de F. Comme K et F sont disjoints, c'est une contradiction et F est donc connexe.