Examen du 9 mai 2006
(9 heures – 13 heures)
Aucun document ni calculatrice autorisés.

Exercice 1 (4 points)
Résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 3$.

Exercice 2 (6 points)
Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ la fonction périodique de période 2π qui vérifie

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \ f(t) = \cos \alpha t$$

a) Donner la série de Fourier de f et étudier sa convergence sur $\mathbb{R}$.
b) Trouver une formule pour $\operatorname{cotan} \alpha\pi$ et en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ on a

$$\operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}$$

Problème (10 points)
Dans tout le problème on note $f(x)$ l'intégrale généralisée

$$x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente ; on note k sa valeur.

2. a) Montrer que l'intégrale $f(x)$ est normalement convergente sur $[0, +\infty[$ et en déduire que f est une fonction continue sur cet intervalle.
b) Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$. Prouver que f est solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y' - y = \frac{-k}{\sqrt{x}}$$

4. Montrer que f est la seule solution de l'équation (E) ayant une limite nulle en $+\infty$.

5. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\lambda(x) = ke^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

— Montrer que λ est définie et dérivable pour tout $x > 0$ et calculer sa dérivée ;
— Vérifier que λ est solution de l'équation (E).

6. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \lambda(x)$.

7. Donner une expression de $f(x)$ à l'aide de λ pour $x > 0$ et vérifier que $\lambda(x) = 2ke^x \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
En déduire la valeur de k.